TD de *Sémantique des langages de programmation* n° 7

Ordres de reduction

Rappel: Etant donnée une signature Σ, un ordre partiel $\succ_\Sigma$ entre les symboles de Σ, et un *statut* qui est soit LEX soit MUL pour les symboles n-aires de Σ, on définit l'odre de reduction RPO (Recursive Path Ordering) sur Σ comme suit

$$\frac{\exists i\ (s_i \succ_{rpo} t \text{ or } s_i = t)}{f(s_1,\dots,s_n) \succ_{rpo} t}\,[1]$$

$$\frac{f \succ_\Sigma g \text{ and } \forall j\ s \succ_{rpo} t_j}{s = f(s_1,\dots,s_n) \succ_{rpo} g(t_1,\dots,t_m)}\,[2.a]$$

$$\frac{f \sim_\Sigma g \in \Sigma_{MUL} \text{ and } \{\!\{s_1,\dots,s_n\}\!\}\ (\succ_{rpo})_{mul}\ \{\!\{t_1,\dots,t_m\}\!\}}{s = f(s_1,\dots,s_n) \succ_{rpo} g(t_1,\dots,t_m) = t}\,[2.b]$$

$$\frac{f \sim_\Sigma g \in \Sigma_{LEX} \text{ and } (s_1,\dots,s_n)(\succ_{rpo})_{lex}\ (t_1,\dots,t_m) \text{ and } \forall j\ s \succ_{rpo} t_j}{s = f(s_1,\dots,s_n)\ \succ_{rpo} g(t_1,\dots,t_m) = t}\,[2.c]$$

Exercice 1 (RPO est transitif) Prouver que la relation RPO est transitive.

Terminaison

Exercice 2 Montrez formellement en utilisant RPO que les systèmes de réécriture suivants terminent

1. $$S_1 = \{f(a,x) \to g(x); f(a,x) \to h(x,x)\}$$

   sur la signature $\{a/0, g/1, f/2, h/2\}$

2. (Distributivité)

   $$S_2 = \{(x+y)\cdot z \to (x\cdot z) + (y\cdot z)\}$$

   sur la signature $\Sigma = \{a/0, b/0, \cdot/2, +/2\}$

3. (Associativité)

   $$S_3 = \{(x\cdot y)\cdot z \to x\cdot(y\cdot z)\}$$

   sur la signature $\Sigma = \{a/0, b/0, \cdot/2\}$