TD de *Sémantique des langages de programmation* n° 5

# Σ-Algèbres

**Exercice 1** *Montrer les propriétés suivantes:*

- *Si* $p \in Pos(s)$ *et* $q \in Pos(t)$, *alors* $(s[t]_p)|_{p.q} = t|_q$ *et* $(s[t]_p)[r]_{p.q} = s[t[r]_q]_p$.
- *Si* $p.q \in Pos(s)$, *alors* $(s[t]_{p.q})|_p = (s|_p)[t]_q$ *et* $(s[t]_{p.q})[r]_p = s[r]_p$.
- *Si* $p, q \in Pos(s)$ *et* $p \bowtie q$, *alors* $(s[t]_p)|_q = s|_q$ *et* $(s[t]_p)[r]_q = (s[r]_q)[t]_p$.

**Exercice 2** *Montrer que la relation* $\sim = \{(x,y) \mid 5$ *est un diviseur de* $x - y\}$ *est une congruence sur l'algèbre* $< \mathbb{N}, \{+/2, \cdot/2\} >$ *(*$\sim$ *est une relation d'équivalence et la somme et multiplication sont monotones par rapport à* $\sim$*).*

**Rappel: système équationnel syntaxique**

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \textit{axiome} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \textit{reflexivite}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \textit{symetrie} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \textit{transitivite}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \textit{substitution} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \textit{contexte}$$

**Exercice 3** *On considère les expressions sur l'alphabet* $\Sigma = \{a/0, b/0, S/2, M/2\}$ *et les propriétés spécifiées par l'ensemble d'équations suivant :*

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{lcllcl} S(a,a) & \doteq & a, & S(S(x_1,x_2),x_3) & \doteq & S(x_1,S(x_2,x_3)), \\ S(a,b) & \doteq & b, & M(M(x_1,x_2),x_3) & \doteq & M(x_1,M(x_2,x_3)), \\ S(b,a) & \doteq & b, & S(M(x_1,x_2),x_3) & \doteq & M(S(x_1,x_3),S(x_2,x_3)), \\ S(b,b) & \doteq & b, & M(S(x_1,x_2),x_3) & \doteq & S(M(x_1,x_3),M(x_2,x_3)), \\ M(a,a) & \doteq & a & & & \\ M(a,b) & \doteq & a & & & \\ M(b,a) & \doteq & a & & & \\ M(b,b) & \doteq & b & & & \end{array} \right\}$$

*Démontrer que les quatre équations suivantes*

$$S(e,b) \doteq b, S(e,a) \doteq e, M(e,b) \doteq e, M(e,a) \doteq a$$

*sont dérivables de manière syntaxique à partir de l'ensemble* $\mathcal{E}$ *pour tout terme clos* $e$.