Université Paris 7 - Master d'Ingéniérie Informatique, 1ère année Année 2008-2009

TD de *Sémantique des langages de programmation* n° 4

# Des calculs en $\lambda$-calcul

## Exercice 1 Combinateurs de point fixe

Un combinateur de point fixe est un terme (clos) $C$ tel que, pour tout terme $M$, $CM \leftrightarrow^*_\beta M(CM)$. Soient

- $V = \lambda y.\ x(yy)$ et $Y = \lambda x.\ VV$
- $Z = \lambda zx.\ x(zzx)$ et $\Theta = ZZ$.
- $\$ = \lambda abc...opqst...xyzr.\ r(thisisafixedpointcombinator)$ et $\Gamma = \underbrace{\$\$\ldots\$}_{26}$

Prouver que $Y$, $\Theta$ et $\Gamma$ sont des combinateurs de point fixe.
Parmi ces trois, lesquels vérifient la propriété additionnelle que, pour tout $M$, $CM \rightarrow^*_\beta M(CM)$ ?
Définir une variante "francophone" de $\Gamma$.

**Appel par valeur** Les valeurs sont des lambda termes clos de la forme $\lambda x.M$

$$\frac{}{\lambda x.M \Downarrow_v \lambda x.M} \qquad \frac{}{(\lambda x.M)\, V \rightsquigarrow_v M\{x/V\}}$$

$$\frac{M \Downarrow_v \lambda x.L \quad N \Downarrow_v V_2 \quad L\{x/V_2\} \Downarrow_v V_1}{M\,N \Downarrow_v V_1} \qquad \frac{M \rightsquigarrow_v M'}{M\,N \rightsquigarrow_v M'\,N} \qquad \frac{N \rightsquigarrow_v N'}{V\,N \rightsquigarrow_v V\,N'}$$

**Appel par nom** Les valeurs sont des lambda termes clos de la forme $\lambda x.M$

$$\frac{}{\lambda x.M \Downarrow_n \lambda x.M} \qquad \frac{}{(\lambda x.M)\, N \rightsquigarrow_n M\{x/N\}}$$

$$\frac{M \Downarrow_n \lambda x.L \quad L\{x/N\} \Downarrow_n V}{M\,N \Downarrow_n V} \qquad \frac{M \rightsquigarrow_n M'}{M\,N \rightsquigarrow_n M'\,N}$$

## Exercice 2 (Recursion en appel par valeur et par nom)

- *réduisez* $\Theta M$ *sur* $M(\Theta M)$ *en appel par nom, small step*
- *que pouvez-vous dire en appel par nom, big step?*
- *pouvez-vous reduire* $\Theta V$ *sur* $M(\Theta V)$ *en appel par valeur, small step?*
- *calculez en appel par nom, small step et big step,* $\Theta(\lambda x.\lambda y.x)$
- *essayez de faire de même en appel par valeur*
- *définissez une variante* $\Theta_v$ *de* $\Theta$ *adaptée au calcul en appel par valeur*

**Exercice 3** *Donner de dérivations de types, si possible, pour les termes suivants :*

1. $\lambda f \lambda x.f\ x\ x$
2. $(\lambda f \lambda x.f\ (f\ z))\ (\lambda x.x)$
3. $(\lambda f \lambda g \lambda x.f\ (g\ x))\ (\lambda x.x)\ (\lambda y.y\ (y\ z))\ z'$

**Exercice 4** **$\lambda$-définissabilité des fonctions récursives**

L'ensemble $\mathscr{R}$ des *fonction récursives partielles*, sous-ensemble de

$$\bigcup_{n \in N} \{f \mid f\ est\ une\ fonction\ partielle\ de\ N^n\ dans\ N\}$$

est défini inductivement comme suit:
Fonction de base de $\mathscr{R}$:

- $0 : N \in \mathscr{R}$ (la constante 0)
- $S : N \to N \in \mathscr{R}$ (la fonction successeur)
- $\pi_k^n : N^n \to N \in \mathscr{R}$ (la $k$-ième projection, pour $k \leq n$)

$\mathscr{R}$ est clos par:

- composition:
  si $h : N^k \to N \in \mathscr{R}$, $g_1, ..., g_k : N^n \to N \in \mathscr{R}$ et on définit $f : N^n \to N$ par
  $f(x_1, ..., x_n) = h(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n))$
  alors $f \in \mathscr{R}$.
- récursion primitive:
  si $g : N^{n-1} \to N \in \mathscr{R}$ et $h : N^{n+1} \to N \in \mathscr{R}$, et on définit $f : N^n \to N$ par
  $f(0, x_1, ..., x_{n-1}) = g(x_1, ..., x_{n-1})$
  $f(Sx, x_1, ..., x_{n-1}) = h(f(x, x_1, ..., x_{n-1}), x, x_1, ..., x_{n-1})$
  alors $f \in \mathscr{R}$.
- minimisation:
  si $g : N^{n+1} \to N \in \mathscr{R}$ et on définit $f : N^n \to N$ par
  $$f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} min\ A & si\ A = \{k \in N \mid g(k, x_1, ..., x_n) = 0\ et\ \forall h < k\ g(h, x_1, ..., x_n) \text{ est défini } \} \neq \emptyset \\ indéfini & sinon \end{cases}$$
  alors $f \in \mathscr{R}$.

1. Soit $fact(n) = n!$. Montrer que $fact : N \to N \in \mathscr{R}$.
2. Prouver que toutes les fonctions récursives partielles sont $\lambda$-définissables, c.à.d. que pour tout $f : N^k \to N \in \mathscr{R}$ il existe un $\lambda$-terme $M_f$ tel que, pour tout $n_1, ..., n_k \in N$, $M_f \overline{n_1} ... \overline{n_k}$ a comme forme normale $\overline{f(n_1, ..., n_k)}$ si $f(n_1, ..., n_k)$ est défini, et $M_f \overline{n_1} . \overline{n_k}$ n'a pas de forme normale si $f(n_1, ..., n_k)$ est indéfini.