

TD de *Sémantique des langages de programmation* n° 2

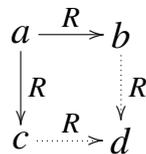
Confluence

I) Confluence du lambda calcul, à la Tait et Martin-Löf

Definition 1 Une relation $R \subseteq A \times A$ a la propriété du diamant si

$$\forall a, b, c \in A [(a, b), (a, c) \in R \Rightarrow \exists d \in A (b, d), (c, d) \in R]$$

Ce qu'on peut écrire:



Proposition 1 (Vue en cours) Une relation qui a la propriété du diamant est confluente.

Definition 2 (Reduction parallèle)

$$\begin{array}{c}
 a \rightarrow_B a \qquad \frac{a \rightarrow_B b}{\lambda x. a \rightarrow_B \lambda x. b} \\
 \frac{a \rightarrow_B a' \quad b \rightarrow_B b'}{ab \rightarrow_B a'b'} \qquad \frac{a \rightarrow_B a' \quad b \rightarrow_B b'}{(\lambda x. a)b \rightarrow_B a'\{b'/x\}}
 \end{array}$$

Exercice 1 [\rightarrow_B commute avec la substitution]
 Montrez que si $a \rightarrow_B a'$ et $b \rightarrow_B b'$ alors $a\{b'/x\} \rightarrow_B a'\{b'/x\}$.

Exercice 2 [Propriétés de \rightarrow_B] Montrez que

- si $\lambda x. b \rightarrow_B c$ alors $c = \lambda x. b'$ et $b \rightarrow_B b'$
- si $a_1 a_2 \rightarrow_B b$ alors on a l'un des deux cas suivants
 - $b = a'_1 a'_2$ et $a_i \rightarrow_B a'_i$
 - $a_1 = \lambda x. a_{10}$ et $b = b_{10}\{b_{11}/x\}$ avec $a_{10} \rightarrow_B b_{10}$ et $a_2 \rightarrow_B b_{11}$

Exercice 3 [\rightarrow_B est confluente] Montrez, en utilisant les points des exercices précédents, que \rightarrow_B a la propriété du diamant, et est donc confluente, par la Proposition 1.

II) Réécriture

Rappel des notations:

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

$$a \rightarrow_R b \quad (a, b) \in R$$

$$a \rightarrow_R^* b \quad \exists n \geq 0 \exists a_0, \dots, a_n \in A \ a = a_0 \rightarrow_R a_1 \rightarrow_R \dots \rightarrow_R a_{n-1} \rightarrow_R a_n = b$$

$$a \rightarrow_R^+ b \quad \exists n \geq 1 \exists a_0, \dots, a_n \in A \ a = a_0 \rightarrow_R a_1 \rightarrow_R \dots \rightarrow_R a_{n-1} \rightarrow_R a_n = b$$

$$a \rightarrow_R^- b \quad a = b \text{ ou } a \rightarrow_R b$$

$$a \leftrightarrow_R b \quad (a, b) \in R \text{ ou } (b, a) \in R$$

$$a \leftrightarrow_R^* b \quad \exists n \geq 0 \exists a_0, \dots, a_n \in A \ a = a_0 \leftrightarrow_R a_1 \leftrightarrow_R \dots \leftrightarrow_R a_{n-1} \leftrightarrow_R a_n = b$$

Exercice 4 Prouver qu'une relation fortement confluente est confluente.

Exercice 5 Deux relations $R, S \subseteq A \times A$ commutent si:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{S^*} & b \\ \downarrow R^* & & \downarrow R^* \\ c & \xrightarrow{S^*} & d \end{array}$$

Soient $R, S \subseteq A \times A$. Prouver que $R \cup S$ est confluente si

- R est confluente, S est confluente et R et S commutent.

Exercice 6 Prouver que si:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{S} & b \\ \downarrow R & & \downarrow R^* \\ c & \xrightarrow{S=} & d \end{array}$$

alors R et S commutent.

III) Reliquat sur la bonne fondation

Definition 3 (Relation bien fondée) Une relation $R \subseteq E \times E$ est bien fondée si tout sous-ensemble non vide de E admet un plus petit élément par rapport à R .

Exercice 7 Prouver que le principe d'induction bien fondée est valable aussi pour toutes les relations $R \subseteq E \times E$ bien fondées (même si elles ne sont pas des ordres).

Exercice 8 Prouver qu'une relation bien fondée n'admet pas de chaîne strictement décroissantes infinies.