Université Paris 7 - Master d'Ingéniérie Informatique, 1ère année — Année 2008-2009

TD de *Sémantique des langages de programmation* n° 2

Confluence

I) Confluence du lambda calcul, à la Tait et Martin-Löf

Definition 1 *Une relation $R \subseteq A \times A$ a la* propriété du diamant *si*

$$\forall a,b,c \in A\ [(a,b),(a,c) \in R \Rightarrow\ \exists d \in A(b,d),(c,d) \in R]$$

Ce qu'on peut écrire:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "R"] \arrow[d, "R"] & b \arrow[d, dotted, "R"] \\ c \arrow[r, dotted, "R"] & d \end{tikzcd}$$

Proposition 1 (Vue en cours) *Une relation qui a la propriété du diamant est confluente.*

Definition 2 *(Reduction parallèle)*

$$a \to_B a \qquad \frac{a \to_B b}{\lambda x.a \to_B \lambda x.b}$$

$$\frac{a \to_B a' \quad b \to_B b'}{ab \to_B a'b'} \qquad \frac{a \to_B a' \quad b \to_B b'}{(\lambda x.a)b \to_B a'\{b'/x\}}$$

Exercice 1 [$\to_B$ commute avec la substitution]
Montrez que si $a \to_B a'$ et $b \to_B b'$ alors $a\{b/x\} \to_B a'\{b'/x\}$.

Exercice 2 [Propriétés de $\to_B$] Montrez que

- si $\lambda x.b \to_B c$ alors $c = \lambda x.b'$ et $b \to_B b'$
- si $a_1 a_2 \to_B b$ alors on a l'un des deux cas suivants
  - $b = a'_1 a'_2$ et $a_i \to_B a'_i$
  - $a_1 = \lambda x.a_{10}$ et $b = b_{10}\{b_{11}/x\}$ avec $a_{10} \to_B b_{10}$ et $a_2 \to_B b_{11}$

Exercice 3 [$\to_B$ est confluente] Montrez, en utilisant les points des exercices précédents, que $\to_B$ a la propriété du diamant, et est donc confluente, par la Proposition 1.

II) Réécriture

Rappel des notations:

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

$a \to_R b$	$(a,b) \in R$
$a \to_R^* b$	$\exists n \geq 0\ \exists a_0, \ldots, a_n \in A\ a = a_0 \to_R a_1 \to_R \ldots \to_R a_{n-1} \to_R a_n = b$
$a \to_R^+ b$	$\exists n \geq 1\ \exists a_0, \ldots, a_n \in A\ a = a_0 \to_R a_1 \to_R \ldots \to_R a_{n-1} \to_R a_n = b$
$a \to_R^= b$	$a = b$ ou $a \to_R b$
$a \leftrightarrow_R b$	$(a,b) \in R$ ou $(b,a) \in R$
$a \leftrightarrow_R^* b$	$\exists n \geq 0\ \exists a_0, \ldots, a_n \in A\ a = a_0 \leftrightarrow_R a_1 \leftrightarrow_R \ldots \leftrightarrow_R a_{n-1} \leftrightarrow_R a_n = b$

Exercice 4 Prouver qu'un relation fortement confluente est confluente.

Exercice 5 Deux relations $R, S \subseteq A \times A$ *commutent* si:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "S^*"] \arrow[d, "R^*"] & b \arrow[d, dotted, "R^*"] \\ c \arrow[r, dotted, "S^*"] & d \end{tikzcd}$$

Soient $R, S \subseteq A \times A$. Prouver que $R \bigcup S$ est confluente si

- R est confluente, S est confluente et R et S commutent.

Exercice 6 Prouver que si:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "S"] \arrow[d, "R"'] & b \arrow[d, dotted, "R^*"] \\ c \arrow[r, dotted, "S^="] & d \end{tikzcd}$$

alors R et S commutent.

III) Reliquat sur la bonne fondation

Definition 3 (Relation bien fondée) *Une relation $R \subseteq E \times E$ est* bien fondée *si tout sousensemble non vide de E admet un plus petit élément par rapport à R.*

Exercice 7 Prouver que le principe d'induction bien fondée est valable aussi pour toutes les relations $R \subseteq E \times E$ bien fondées (même si elles ne sont pas des ordres).

Exercice 8 Prouver qu'une relation bien fondée n'admet pas de chaîne strictement décroissantes infinies.