DEA '00: Examen de Logique Linéaire et Calcul de Motifs

29 Mars 2000

Note: vous avez 2 heures. Tous les documents sont autorisés. Rédigez chaque partie sur des feuilles séparables.

1 Prouvabilité, Réseaux

Définition (Équivalence linéaire) On dit que deux formules A et B sont linéairement équivalentes ($A \equiv B$) ssi $\vdash A \multimap B$ et $\vdash B \multimap A$

Exercise 1.1 *Prouvez les équivalences suivantes:*

- $!(A \& B) \equiv (!A) \otimes (!B)$
- $?(A \oplus B) \equiv (?A) \parr (?B)$
- $(A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \equiv A \otimes (B \oplus C)$

Exercise 1.2 *Assumez maintenant le theorème d'élimination des coupures, et démontrez que les formules suivantes ne sont pas prouvables (pour la dernière, donnez seulement une esquisse de l'argument):*

- $A \parr A \multimap A$
- $A \& A^{\perp}$
- $!?A \multimap ?!A$

Exercise 1.3 *Nous nous plaçons maintenant dans le fragment multiplicatif MLL* sans unités*.*
On assumera dans cet exercice le fait suivant, sans le demontrer.

***Fait*:** on peut considerer sans perte de généralité que les reseaux de la Logique Lineaire soient construits exclusivement à partir de liens axiome atomiques, i.e. axiomes portant exclusivement sur des formules atomiques.

Dans ce qui suit, pour reseau on entendra reseau construit avec axiomes atomiques.

- *Considerons un reseau sans cut et avec une seule conclusion A. Ce reseau est composé de $T(A)$, l'arbre syntactique de la formule A, plus des liens axiomes qui connectent les feuilles.*
  Soit $N(A)$ le nombre de liens axiomes dans S; comme ces liens sont tous atomiques, ce nombre est égal à la moitié des occurrences de formules atomiques dans A.
  Si G est un graphe de correction de S, soit $G^T(A)$ le graphe obtenu de G en enlevant de G tous les liens axiomes.
  Montrez que $C(A) = N(A) + 1$, où $C(A)$ est le nombre de composantes connexes d'un $G^T(A)$ quelconque.
- *Deduisez que le nombre $P(A)$ de connecteur $⅋$ dans A est égal à $N(A)$*
- *Deduisez que si $\vdash A$, alors $\nvdash \underbrace{A, A, \ldots A}_{n}$ pour tout $n \geq 2$.*

2 Normalisation Forte de λx

Considérons le calcul $\lambda\mathtt{x}$ comportant les règles de réduction dans la figure 1 et les règles de typage dans la figure 2.

Nous dénotons avec ES le système de réduction $\{App, Lamb, Var1, Var2\}$ et avec $ES(t)$ la ES-forme normale de t. La notation $\Gamma \vdash t : A$ indique typabilité dans le λ-calcul simplement typé, SN_λ est l'ensemble de λ-termes qui sont β-fortement normalisables et $SN_{\lambda\mathtt{x}}$ est l'ensemble de $\lambda\mathtt{x}$-termes qui sont $\lambda\mathtt{x}$-fortement normalisables. L'ensemble $\mathcal{F}$ étudié en cours est défini par

$$\mathcal{F} = \{M \in \lambda\mathtt{x}\text{-termes} \mid \text{pour tout sous-terme } N \text{ de } M \text{ on a } ES(N) \in SN_\lambda\}$$

$$
\begin{array}{llll}
(\lambda x.M)N & \longrightarrow_{B} & M[x/N] & \\
(MN)[x/L] & \longrightarrow_{App} & (M[x/L]N[x/L]) & \\
(\lambda y.M)[x/L] & \longrightarrow_{Lamb} & \lambda y.M[x/L] & \text{si } x \neq y \text{ et } y \notin FV(L) \\
y[x/M] & \longrightarrow_{Var1} & y & \\
x[x/M] & \longrightarrow_{Var2} & M &
\end{array}
$$

Figure 1: Règles de réduction du $\lambda\mathtt{x}$-calcul

$$
\frac{}{\Gamma, x : A \vdash_{\lambda\mathtt{x}} x : A}\ (var)
\qquad
\frac{\Gamma, x : B \vdash_{\lambda\mathtt{x}} M : A \quad \Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} N : B}{\Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} M[x/N] : A}\ (subst)
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} M : B\ A \quad \Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} N : B}{\Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} (MN) : A}\ (app)
\qquad
\frac{\Gamma, x : A \vdash_{\lambda\mathtt{x}} M : B}{\Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} \lambda x : A.M : B\ A}\ (abs)
$$

Figure 2: Règles de typage du $\lambda\mathtt{x}$-calcul

Nous vous rappelons les deux propriétés suivantes:

Prop 1: Tout λ-term typable est β-fortement normalisable.

Prop 2: $\mathcal{F} = SN_{\lambda\mathtt{x}}$.

Montrer les propriétés suivantes:

1. Préservation de types dans $\lambda\mathtt{x}$: si $\Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} M : A$ et $M \longrightarrow_{\lambda\mathtt{x}} M'$ alors $\Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} M' : A$.
2. Tous les sous-termes d'un $\lambda\mathtt{x}$-terme typable sont typables.
3. $\Gamma \vdash t : A$ implique $\Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} t : A$.
4. $\Gamma \vdash_{\lambda\mathtt{x}} t : A$ implique $\Gamma \vdash ES(t) : A$.
5. Tout $\lambda\mathtt{x}$-terme typable est $\lambda\mathtt{x}$-fortement normalisable.