DEA '96: Exercices de sémantique dénotationnelle

Roberto Di Cosmo

13 décembre 1996

Exercice 1.1 (Points fixes) *Considérons la définition recursive pour* $f : Z \times Z \rightarrow Z_\perp$*:*

$$f(j,k) = \begin{cases} k+1 & si\ j = k \\ f(j, f(j-1, k+1)) & sinon \end{cases}$$

- *montrez que les deux fonctions suivantes sont des solution:*

$$f^1(j,k) = k+1$$

$$f^2(j,k) = \begin{cases} j+1 & si\ j = k \\ k-1 & sinon \end{cases}$$

- *quelle est la plus petite solution?*

Exercice 1.2 (Points fixes: difficile) *Considérons la définition recursive pour* $f : I\!N \rightarrow I\!N_\perp$*:*

$$f(k) = \begin{cases} k-10 & si\ k > 100 \\ f(f(k+11)) & sinon \end{cases}$$

- *construisez le fonctionnel* $F : (I\!N \rightarrow I\!N_\perp) \rightarrow (I\!N \rightarrow I\!N_\perp)$ *dont les points-fixes satisfont la définition*
- *calculez les iterés* $F^n(\perp)$ *du fonctionnel* F
- *utilisez les théorème du plus petit point fixe pour trouver le plus petit point fixe* $fix(F)$ *de* F *et donnez une définition directe (non recursive) de* $fix(F)$
- *programmez* f *en CamlLight et vérifiez que CamlLight calcule bien le plus petit point fixe de* F*.*

Exercice 1.3 (Sémantique des boucles) *En utilisant la technique discutée en cours pour prouver l'égalité de deux objets définis par plus petit point-fixe, démontrez formellement que*

$$[\![\texttt{repeat c until b}]\!] = [\![\texttt{c; while (not b) do c}]\!]$$

pour tout commande `c` *et expression booléenne* `b`. *(On prend bien sûr là la définition de* $[\![]\!]$ *pour* $TFun_{ref}$ *avec commandes). Vous pouvez aussi chercher à utiliser l'uniformité du plus petit point fixe.*

Exercice 1.4 (Sémantique d'un petit programme) *Développez complètement la sémantique du programme suivant par rapport à la définition de* $[\![]\!]$ *pour* $TFun_{exc}$ *avec déclarations et en CBV:*

```
let boo = f where rec f(x) = if x < 10 then 1 else error(trop)
in handle(trop,boo 11, 0)
```