TD de *Sémantique des langages de programmation* n° 7

Paires critiques et terminaison

Exercice 1 [Paires critiques]

Rappel: Soient $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2$ deux instances de règles de réécriture sans variables communes. Soit p une position de l_1, tels que $l_1|_p$ n'est pas une variable et $l_1|_p$ et l_2 sont unifiables. Soit σ l'unificateur principal de $l_1|_p$ et l_2. Alors, la paire $< \sigma(r_1)\ ,\ \sigma(l_1)[\sigma(r_2)]|_p >$ est une *paire critique.*

1. Définir un système de réecriture sans paires critiques, puis un deuxième avec au moins une paire critique.
2. Trouver toutes les paires critiques du systeme de réecriture suivant (où, comme d'habitude, les lettres de debut d'alphabet représentent des constantes, celles de fin d'alphabet des variables):

$$\begin{array}{lcl} f(g(x,a),h(c)) & \to & i(x,a,c) \\ g(y,y) & \to & y \\ h(z) & \to & z \end{array}$$

3. On dit q'une paire critique $< t, s >$ d'un système de réecriture $\mathbb{R}$ est *joignable* s'il existe un terme r tel que $t \ \to^*_{\mathbb{R}} r$ et $s \to^*_{\mathbb{R}} r$.
   - Les paires critiques du système ci-dessus sont-elles joignables?
   - Définir une extension du système dans laquelle les paires critiques soient joignables.

Terminaison

Rappel: Soit Σ une signature, X un ensemble de variables.

Un *ordre de reduction* $<$ sur $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ est une relation d'ordre *bien fondée* sur $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ telle que:

- (stabilité par substitution) si $t < s$ alors pour toute substitution σ, $t\sigma < s\sigma$.
- pour tout symbole de fonction $f \in \Sigma$, f est monotone pour $<$: si $t < s$ alors $f(..., t, ...) < f(..., s, ...)$.

Soit $S = \{g_i \to d_i\}_{i=1,2,...,k}$ un système de récriture sur $\mathcal{T}(\Sigma, X)$: S termine si et seulement si il existe un ordre de réduction $<$ tel que, pour toute règle $g_i \to d_i$, $d_i < g_i$.

Une *interprétation polynomiale* de domaine A, sous ensemble de l'ensemble N^+ des entiers positifs, est la donnée d'un polynome $P_f(x_1, ..., x_n)$ *complétement monotone*[1] pour chaque symbole f d'arité n de Σ

Si on se donne une interprétation des variables $\rho : X \to A$, on peut associer un entier $|t|_\rho$ à tout terme t de $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ comme suit:

- $|x|_\rho = \rho(x)$ pour $x \in X$.
- $|f(t_1, ..., t_n)|_\rho = P_f(|t_1|_\rho, ..., |t_n|_\rho)$

Si, pour tout ρ et pour pour toute règle de récriture $g_i \to d_i$, $|d_i|_\rho < |g_i|_\rho$, alors S termine.

[1] Un polynome est completement monotone s'il dépend de toutes se variables et si ses coefficients sont positifs.

Plus généralement, une interprétation bien fondé de S est une Σ-algèbre munie d'une relation bien fondé pour laquelle toutes les interprétations des symboles de Σ sont monotones.

Si on trouve une interprétation bien fondé qui fait décroitre les règles de récriture (pour tout ρ), alors le système termine.

Exercice 2 On considère les systèmes de récriture suivants, sur les signature $\{a/0, g/1, f/2\}$ et $\{a/0, g/1, f/2, h/2\}$ respectivement.

$S_1 = \{f(a, x) \to g(x)\}$

$S_2 = \{f(a, x) \to h(x, x)\}$

1. Montrer que la relation "$t < s$ ssi t contient strictement moins d'occurrences de a que s" n'est un ordre de réduction ni pour S_1 ni pour S_2.

2. Donner un ordre de réduction pour montrer la terminaison de S_1.

3. Montrer la terminaison de $S_1 \cup S_2$ en utilisant une interpretation polynomiale.

Exercice 3 [**Associativité**]
Montrez en utilisant une interprétation polynomiale que le système constituè de la règle suivante, sur la signature $\Sigma = \{a/0, b/0, \cdot/2\}$ termine:

$$(x \cdot y) \cdot z \to x \cdot (y \cdot z)$$

Exercice 4 On considère la signature Σ qui contient les constantes *true* et $false$, les symboles de fonction binaires *and* et *or* et le symbole de fonction unaire *not*.

Soit S le système défini par[2]

$$\begin{array}{lcl} not(not(x)) & \to & x \\ not(or(x, y)) & \to & and(not(x), not(y)) \\ not(and(x, y)) & \to & or(not(x), not(y)) \\ and(x, or(y, z)) & \to & or(and(x, y), and(x, z)) \\ and(or(x, y), z) & \to & or(and(x, y), and(y, z)) \end{array}$$

Montrer la terminaison de S à l'aide d'une interprétation bien fondée

[2] S calcule la *forme normale disjonctive* d'une formule du calcul propositionnel