Le calcul des prédicats

Le calcul des prédicats

– Syntaxe
– Formalisation du langage naturel
– Sémantique

Syntaxe : alphabet

– Les connecteurs $\to, \neg, \wedge, \vee$
– Les quantificateurs $\exists, \forall$
– Un ensemble dénombrable de variables $x, y, z, \ldots$
– Une signature Σ contenant :
  – Un ensemble dénombrable de symboles de fonction $\Sigma_F = \{f, g, h, \ldots\}$, chacun ayant une arité
  – Un ensemble dénombrable de symboles de prédicats $\Sigma_P = \{p, q, r, \ldots\}$, chacun ayant une arité

Les termes

Définition : Pour chaque symbole de fonction f d'arité n on définit une fonction C_f associée à f telle que $C_f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$.
L'ensemble de termes $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ est l'ensemble inductif contenant l'ensemble de variables $\mathcal{X}$ et fermé par toutes les fonctions C_f.

Définition alternative :
– Chaque variable x dans $\mathcal{X}$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
– Si $t_1, \ldots, t_n$ sont de termes et $f \in \Sigma_F$ est un symbole de fonction d'arité n, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Un terme est clos s'il ne contient aucune variable.

Les atomes

Définition : Un atome est de la forme $p(t_1, \ldots, t_n)$, où p est un symbole de prédicat d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont de termes.

Exemple : Si $\Sigma_F = \{0, Suc\}$ et $\Sigma_P = \{inf\}$, alors 0 et $S(S(x)))$ sont de termes, 0 et $S(S(S(0))))$ sont de termes clos et $inf(0, S(S(x))))$ est un atome.

Les formules

Définition :
– Chaque atome est une formule.
– Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
– Si A et B sont deux formules, $A \to B$, $A \wedge B$, et $A \vee B$ sont de formules.
– Si A est une formule et x est une variable, alors $\forall x.\ A$ et $\exists x.\ A$ sont de formules.

Exemple : $\forall x.\ (enfant(x) \to \exists y.\ mere(y, x))$

Formules : définition alternative

Soit A_i et E_i les fonctions

$$A_i(B) = \forall x_i.\ B \qquad E_i(B) = \exists x_i.\ B$$

Soient $C_\neg, C_\to, C_\wedge, C_\vee$ les fonctions associées aux connecteurs $\neg, \to, \wedge, \vee$.

Définition : L'ensemble de formules est l'ensemble inductif contenant les atomes et fermé par toutes les fonctions $C_\neg, C_\to, C_\wedge, C_\vee, A_i$ et E_i.

Le calcul propositionnel commme un calcul des prédicats

Le calcul propositionnel peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature Σ t.q.
– l'ensemble Σ_F est vide
– l'ensemble Σ_P contient uniquement des prédicats 0-aires,
– les quantificateurs ne sont pas utilisés

Variables libres et liées

Les variables libres (Vl) et liées (VE) d'une formule sont définies comme suit :
– Si A est un atome, $VI(A)$ contient toutes les variables de A, et $VE(A) = \emptyset$.

– Si $A = \neg B$, $VI(A) = VI(B)$ et $VE(A) = VE(B)$.
– Si $A = B \# C$, pour $\# \in \{\to, \vee, \wedge\}$, $VI(A) = VI(B) \cup VI(C)$ et $VE(A) = VE(B) \cup VE(C)$.
– Si $A = \forall x.\ B$ ou $A = \exists x.\ B$, $VI(A) = VI(B) \setminus \{x\}$ et $VE(A) = VE(B) \cup \{x\}$.

Exemple : Si $A = \forall x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(A) = \{y\}$ et $VE(A) = \{x\}$.
Si $B = r(x) \vee \forall x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(B) = \{x, y\}$ et $VE(B) = \{x\}$.

Remarque : On suppose que l'on peut toujours renommer les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme rectifiée :
– toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e. $\forall x.\ \exists x.\ A$.
– les variables libres et liées d'une formule A portent de noms distincts, i.e. $VI(A) \cap VE(A) = \emptyset$. On ne peut plus écrire la formule G précédante.

À partir de maintenant on travaille uniquement avec de formules rectifiées. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

Formalisation du langage naturel

– Tous les hommes sont méchants.

$$\forall x.\ (H(x) \to M(x))$$

– Seulement les hommes sont méchants.

$$\forall x.\ (M(x) \to H(x))$$

– Il existe un homme méchant.

$$\exists x.\ (H(x) \wedge M(x))$$

– Il n'existe pas d'homme méchant.

$$\neg \exists x.\ (H(x) \wedge M(x))$$

– Il existe un homme qui aime tous les chiens. $\exists x.\ (H(x) \wedge Aimetousleschiens(x))$
$Aimetousleschiens(x) \equiv \forall y.\ (Chien(y) \to Aime(x, y))$

– Chaque homme connaît qui la déteste.

$$\forall x.\ (H(x) \to Connaitdeteste(x))$$

$$Connaitdeteste(x) \equiv \forall y.\ (D(y, x) \to C(x, y))$$

– Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.

$$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2)$$
$$aimetoutlemonde(x) \equiv \forall y.\ Aime(x, y)$$
$$aimepersonne(x) \equiv \forall y.\ \neg Aime(x, y)$$

$$A_1 \equiv \forall x.\ (H(x) \to \exists y.\ Aime(x, y))$$
$$B_1 \equiv \neg \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$
$$A_2 \equiv \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$
$$B_2 \equiv \exists x.\ (H(x) \wedge aimepersonne(x))$$

Sémantique du calcul de prédicats *à la Tarksi*[1]

Définition : Une interprétation d'une signature Σ est donnée par un triplet $\langle \mathcal{D}, \mathcal{I}_f, \mathcal{I}_P \rangle$ où :
1. D est un ensemble, appelé "univers du discours", où, plus simplement, *domaine*
2. $\mathcal{I}_f$ est une fonction qui envoie chaque $g \in \Sigma_F$ d'arité n vers $\mathcal{I}_f(g) : \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$
3. $\mathcal{I}_P$ est une fonction qui envoie chaque $Q \in \Sigma_P$ d'arité n vers $\mathcal{I}_P(Q) : \mathcal{D}^n \to BOOL$

Dans la suite, on oubliera les suffixes et on écrira simplement $\mathcal{I}(g)$ ou $\mathcal{I}(Q)$; on notera aussi tout simplement $\mathcal{I}$ une intérprétation, et on appellera $\mathcal{D}$ le *domaine de l'interprétation* $\mathcal{I}$.

Définition : Soit $\mathcal{I}$ une interprétation pour Σ ayant $\mathcal{D}$ comme domaine et soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. Une assignation ou valuation dans $\mathcal{I}$ est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$.

Notation : Si σ est une assignation, alors on écrit $\sigma[x := d]$ pour l'assignation qui vérifie $\sigma[x := d](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := d](x) = d$ sinon.

Interprétation d'un terme

Définition : Soit $\mathcal{I}$ une interprétation et soit σ assignation dans $\mathcal{I}$. Alors l'interprétation d'un terme t dans $\mathcal{I}$ pour σ, notée $[t]_{\mathcal{I},\sigma}$ est définie par récurrence comme suit :

[1] 1933

- $[x]_{\mathcal{I},\sigma} = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(f)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$

Remarque : Lorsque le symbole de fonction f est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(f)$ est une fonction constante.

Interprétation d'une formule

Définition : L'interprétation d'une formule A dans une interprétation $\mathcal{I}$ pour une assignation σ, notée $[A]_{\mathcal{I},\sigma}$, est définie par récurrence comme suit :
- $[p(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(p)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\neg A]_{\mathcal{I},\sigma} = B_{\neg}([A]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I},\sigma} = B_{\#}([A]_{\mathcal{I},\sigma}, [B]_{\mathcal{I},\sigma})$ pour $\# \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$
- $[\exists x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} =$
  - $\mathbf{V}$ s'il existe $d \in \mathcal{D}$ t.q. $[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$
  - $\mathbf{F}$ sinon
- $[\forall x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} =$
  - $\mathbf{V}$ si pour tout $d \in \mathcal{D}$, $[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$
  - $\mathbf{F}$ sinon

Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(p)$ est $\mathbf{V}$ ou $\mathbf{F}$.

Nouvelles notions de satisfiablité

Définition :
- $\mathcal{I}$ satisfait une formule B si pour toute valuation σ dans $\mathcal{I}$, $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- $\mathcal{I}$ falsifie une formule B s'il existe une valuation σ dans $\mathcal{I}$ t.q $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{F}$.

On verra plus tard que pour étudier la satisfiablité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Rappel : les notions de validité, conséquence logique

Définition :
- Une formule B est valide si toute interprétation $\mathcal{I}$ satisfait B.
- Une formule B est conséquence logique d'un ensemble de formules Δ, noté $\Delta \models B$, si toute interprétation qui satisfait Δ satisfait aussi B.
- Deux formules A et B sont équivalentes, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Quelques exemples de conséquence logique

$$\begin{array}{lcl} \exists y.\ \forall x.\ r(y,x) & \models & \forall x.\ \exists y.\ r(y,x) \\ \exists x.\ (A \wedge B) & \models & \exists x.\ A \wedge \exists x.\ B \\ \forall x.\ A \vee \forall x.\ B & \models & \forall x.\ (A \vee B) \end{array}$$

Quelques exemples d'équivalence

$$\begin{array}{lcl} \forall x.\ A & \equiv & \neg\exists x.\ \neg A \\ \neg\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ \neg A \\ \exists x.\ A & \equiv & \neg\forall x.\ \neg A \\ \neg\exists x.\ A & \equiv & \forall x.\ \neg A \\ \forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & \forall x.\ A \wedge \forall x.\ B \\ \exists x.\ (A \vee B) & \equiv & \exists x.\ A \vee \exists x.\ B \\ \exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & \forall x.\ A \rightarrow \exists x.\ B \\ \forall x.\ \forall y.\ A & \equiv & \forall y.\ \forall x.\ A \\ \exists x.\ \exists y.\ A & \equiv & \exists y.\ \exists x.\ A \end{array}$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$\begin{array}{lclcl} \forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ A & \equiv & A \\ \forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x.\ B & & \\ \exists x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x.\ B & & \\ \forall x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x.\ B & & \\ \exists x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x.\ B & & \\ \exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \exists x.\ B & & \\ \forall x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \forall x.\ B & & \\ \exists x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \forall x.\ B \rightarrow A & & \\ \forall x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \exists x.\ B \rightarrow A & & \end{array}$$

Calcul propositionnel dans le calcul des prédicats

Théorème : Si Γ est un ensemble de formules du calcul propositionnel, et A est une formule du calcul propositionnel, alors

$$\Gamma \models_{Prop} A \text{ ssi } \Gamma \models_{Pred} A$$

On dit aussi que le calcul des prédicats est une *extension conservative* du calcul propositionnel.