
Le calcul des prédicats

Le calcul des prédicats

- Syntaxe
- Formalisation du langage naturel
- Sémantique

Syntaxe : alphabet

- Les **connecteurs** $\rightarrow, \neg, \wedge, \vee$
- Les **quantificateurs** \exists, \forall
- Un ensemble dénombrable de **variables** x, y, z, \dots
- Une **signature** Σ contenant :
 - Un ensemble dénombrable de symboles de fonction $\Sigma_F = \{f, g, h, \dots\}$, chacun ayant une arité
 - Un ensemble dénombrable de symboles de prédicats $\Sigma_P = \{p, q, r, \dots\}$, chacun ayant une arité

Les termes

Définition : Pour chaque symbole de fonction f d'arité n on définit une **fonction C_f associée à f** telle que $C_f(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.

L'ensemble de **termes** $\mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$ est l'ensemble inductif contenant l'ensemble de **variables** \mathcal{X} et **fermé par** toutes les fonctions C_f .

Définition alternative :

- Chaque variable x dans \mathcal{X} est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.
- Si t_1, \dots, t_n sont de termes et $f \in \Sigma_F$ est un symbole de fonction d'arité n , alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma, \mathcal{X}}$.

Un terme est **clos** s'il ne contient aucune variable.

Les atomes

Définition : Un **atome** est de la forme $p(t_1, \dots, t_n)$, où p est un **symbole de prédicat d'arité n** et t_1, \dots, t_n sont de termes.

Exemple : Si $\Sigma_F = \{0, Suc\}$ et $\Sigma_P = \{inf\}$, alors 0 et $S(S(S(x)))$ sont de termes, 0 et $S(S(S(0)))$ sont de termes clos et $inf(0, S(S(S(x))))$ est un atome.

Les formules

Définition :

- Chaque **atome** est une formule.
- Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
- Si A et B sont deux formules, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, et $A \vee B$ sont de formules.
- Si A est une formule et x est une variable, alors $\forall x. A$ et $\exists x. A$ sont de formules.

Exemple : $\forall x. (enfant(x) \rightarrow \exists y. mere(y, x))$

Formules : définition alternative

Soit A_i et E_i les fonctions

$$A_i(B) = \forall x_i. B \quad E_i(B) = \exists x_i. B$$

Soient $C_{\neg}, C_{\rightarrow}, C_{\wedge}, C_{\vee}$ les fonctions associées aux connecteurs $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$.

Définition : L'ensemble de **formules** est l'ensemble inductif contenant les **atomes** et fermé par toutes les fonctions $C_{\neg}, C_{\rightarrow}, C_{\wedge}, C_{\vee}, A_i$ et E_i .

Le calcul propositionnel comme un calcul des prédicats

Le calcul propositionnel peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature Σ t.q.

- l'ensemble Σ_F est vide
- l'ensemble Σ_P contient uniquement des prédicats 0-aires,
- les quantificateurs ne sont pas utilisés

Variables libres et liées

Les variables **libres (VI)** et **liées (VE)** d'une formule sont définies comme suit :

- Si A est un atome, $VI(A)$ contient toutes les variables de A , et $VE(A) = \emptyset$.

- Si $A = \neg B$, $VI(A) = VI(B)$ et $VE(A) = VE(B)$.
- Si $A = B \# C$, pour $\# \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$, $VI(A) = VI(B) \cup VI(C)$ et $VE(A) = VE(B) \cup VE(C)$.
- Si $A = \forall x. B$ ou $A = \exists x. B$, $VI(A) = VI(B) \setminus \{x\}$ et $VE(A) = VE(B) \cup \{x\}$.

Exemple : Si $A = \forall x. q(x, f(x, y))$ on a $VI(A) = \{y\}$ et $VE(A) = \{x\}$.
Si $B = r(x) \vee \forall x. q(x, f(x, y))$ on a $VI(B) = \{x, y\}$ et $VE(B) = \{x\}$.

Remarque : On suppose que l'on peut **toujours renommer** les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme **rectifiée** :

- toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e. $\forall x. \exists x. A$.
- les variables libres et liées d'une formule A portent de noms distincts, i.e. $VI(A) \cap VE(A) = \emptyset$. On ne peut plus écrire la formule G précédente.

À partir de maintenant on travaille uniquement avec de formules rectifiées. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

Formalisation du langage naturel

- Tous les hommes sont méchants.

$$\forall x. (H(x) \rightarrow M(x))$$

- Seulement les hommes sont méchants.

$$\forall x. (M(x) \rightarrow H(x))$$

- Il existe un homme méchant.

$$\exists x. (H(x) \wedge M(x))$$

- Il n'existe pas d'homme méchant.

$$\neg \exists x. (H(x) \wedge M(x))$$

- Il existe un homme qui aime tous les chiens. $\exists x. (H(x) \wedge \text{Aimetousleschiens}(x))$
 $\text{Aimetousleschiens}(x) \equiv \forall y. (\text{Chien}(y) \rightarrow \text{Aime}(x, y))$

- Chaque homme connaît qui la déteste.

$$\forall x. (H(x) \rightarrow \text{Connaitdeteste}(x))$$

$$\text{Connaitdeteste}(x) \equiv \forall y. (D(y, x) \rightarrow C(x, y))$$

- Chaque personne aime quelqu'un **et** personne n'aime tout le monde **ou bien** quelqu'un aime tout le monde **et** quelqu'un n'aime personne.

$$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2)$$

$$\text{aimetoutlemonde}(x) \equiv \forall y. \text{Aime}(x, y)$$

$$\text{aimepersonne}(x) \equiv \forall y. \neg \text{Aime}(x, y)$$

$$A_1 \equiv \forall x. (H(x) \rightarrow \exists y. \text{Aime}(x, y))$$

$$B_1 \equiv \neg \exists x. (H(x) \wedge \text{aimetoutlemonde}(x))$$

$$A_2 \equiv \exists x. (H(x) \wedge \text{aimetoutlemonde}(x))$$

$$B_2 \equiv \exists x. (H(x) \wedge \text{aimepersonne}(x))$$

Sémantique du calcul de prédicats à la Tarski¹

Définition : Une **interprétation** d'une **signature** Σ est donnée par un triplet $\langle \mathcal{D}, \mathcal{I}_f, \mathcal{I}_P \rangle$ où :

1. \mathcal{D} est un ensemble, appelé "univers du discours", où, plus simplement, **domaine**
2. \mathcal{I}_f est une fonction qui envoie chaque $g \in \Sigma_F$ d'arité n vers $\mathcal{I}_f(g) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$
3. \mathcal{I}_P est une fonction qui envoie chaque $Q \in \Sigma_P$ d'arité n vers $\mathcal{I}_P(Q) : \mathcal{D}^n \rightarrow \text{BOOL}$

Dans la suite, on oubliera les suffixes et on écrira simplement $\mathcal{I}(g)$ ou $\mathcal{I}(Q)$; on notera aussi tout simplement \mathcal{I} une interprétation, et on appellera \mathcal{D} le **domaine de l'interprétation** \mathcal{I} .

Définition : Soit \mathcal{I} une interprétation pour Σ ayant \mathcal{D} comme domaine et soit \mathcal{X} un ensemble de variables. Une **assignation** ou **valuation** dans \mathcal{I} est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$.

Notation : Si σ est une assignation, alors on écrit $\sigma[x := d]$ pour l'assignation qui vérifie $\sigma[x := d](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := d](x) = d$ sinon.

Interprétation d'un terme

Définition : Soit \mathcal{I} une interprétation et soit σ assignation dans \mathcal{I} . Alors l'**interprétation d'un terme** t dans \mathcal{I} pour σ , notée $[t]_{\mathcal{I}, \sigma}$ est définie par récurrence comme suit :

¹1933

- $[x]_{\mathcal{I},\sigma} = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(f)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \dots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$

Remarque : Lorsque le symbole de fonction f est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(f)$ est une fonction constante.

Interprétation d'une formule

Définition : L'interprétation d'une formule A dans une interprétation \mathcal{I} pour une assignation σ , notée $[A]_{\mathcal{I},\sigma}$, est définie par récurrence comme suit :

- $[p(t_1, \dots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathcal{I}(p)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \dots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[\neg A]_{\mathcal{I},\sigma} = B_{\neg}([A]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I},\sigma} = B_{\#}([A]_{\mathcal{I},\sigma}, [B]_{\mathcal{I},\sigma})$ pour $\# \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$
- $[\exists x. A]_{\mathcal{I},\sigma} =$
 - **V** s'il existe $d \in \mathcal{D}$ t.q. $[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$
 - **F** sinon
- $[\forall x. A]_{\mathcal{I},\sigma} =$
 - **V** si pour tout $d \in \mathcal{D}$, $[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]} = \mathbf{V}$
 - **F** sinon

Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(p)$ est **V** ou **F**.

Nouvelles notions de satisfiabilité

Définition :

- \mathcal{I} **satisfait** une formule B si pour toute valuation σ dans \mathcal{I} , $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- \mathcal{I} **falsifie** une formule B s'il existe une valuation σ dans \mathcal{I} t.q. $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{F}$.

On verra plus tard que pour étudier la satisfiabilité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Rappel : les notions de validité, conséquence logique

Définition :

- Une formule B est **valide** si toute interprétation \mathcal{I} satisfait B .
- Une formule B est **conséquence logique** d'un ensemble de formules Δ , noté $\Delta \models B$, si toute interprétation qui satisfait Δ satisfait aussi B .
- Deux formules A et B sont **équivalentes**, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Quelques exemples de conséquence logique

$$\begin{aligned} \exists y. \forall x. r(y, x) &\models \forall x. \exists y. r(y, x) \\ \exists x. (A \wedge B) &\models \exists x. A \wedge \exists x. B \\ \forall x. A \vee \forall x. B &\models \forall x. (A \vee B) \end{aligned}$$

Quelques exemples d'équivalence

$$\begin{aligned} \forall x. A &\equiv \neg \exists x. \neg A \\ \neg \forall x. A &\equiv \exists x. \neg A \\ \exists x. A &\equiv \neg \forall x. \neg A \\ \neg \exists x. A &\equiv \forall x. \neg A \\ \forall x. (A \wedge B) &\equiv \forall x. A \wedge \forall x. B \\ \exists x. (A \vee B) &\equiv \exists x. A \vee \exists x. B \\ \exists x. (A \rightarrow B) &\equiv \forall x. A \rightarrow \exists x. B \\ \forall x. \forall y. A &\equiv \forall y. \forall x. A \\ \exists x. \exists y. A &\equiv \exists y. \exists x. A \end{aligned}$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$\begin{aligned} \forall x. A &\equiv \exists x. A &\equiv A \\ \forall x. (A \wedge B) &\equiv A \wedge \forall x. B \\ \exists x. (A \wedge B) &\equiv A \wedge \exists x. B \\ \forall x. (A \vee B) &\equiv A \vee \forall x. B \\ \exists x. (A \vee B) &\equiv A \vee \exists x. B \\ \exists x. (A \rightarrow B) &\equiv A \rightarrow \exists x. B \\ \forall x. (A \rightarrow B) &\equiv A \rightarrow \forall x. B \\ \exists x. (B \rightarrow A) &\equiv \forall x. B \rightarrow A \\ \forall x. (B \rightarrow A) &\equiv \exists x. B \rightarrow A \end{aligned}$$

Calcul propositionnel dans le calcul des prédicats

Théorème : Si Γ est un ensemble de formules du calcul propositionnel, et A est une formule du calcul propositionnel, alors

$$\Gamma \models_{Prop} A \text{ ssi } \Gamma \models_{Pred} A$$

On dit aussi que le calcul des prédicats est une *extension conservative* du calcul propositionnel.