

## Éléments de Combinatoire

### Combinatoire

Atlas des Mathématiques :

"L'analyse combinatoire s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis"

Elle est popularisée en Occident par Pascal<sup>1</sup> et Fermat, dans l'étude des jeux d'hasard (17ème siècle). Elle était déjà utilisée avant dans le monde Arabe (al-Karaji<sup>2</sup>, circa 1100) et en Chine (Shen Kua<sup>3</sup>, 1031-1095).

### Arrangements et Permutations

**Définition :** Un **arrangement** de longueur  $k$  d'un ensemble  $E$  de  $n$  éléments est une *suite ordonnée* de  $k$  éléments *distincts* de  $E$ .  $A_n^k$  est le nombre des arrangements de longueur  $k$  sur un ensemble de  $n$  éléments.

**Proposition :**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Définition :** Une **permutation** d'un ensemble à  $n$  éléments est un arrangement de longueur  $n$ . On écrit  $P_n$  pour  $A_n^n$ . On a alors  $P_n = n!$

### Exemple : le voyageur de commerce

Un voyageur de commerce doit visiter  $n$  villes, une et une seule fois, en commençant d'une ville donnée. Combien de parcours possibles peut-il emprunter pour s'acquitter de sa tâche ?

<sup>1</sup>1623-1662 Usage du triangle arithmétique pour déterminer les parties"

<sup>2</sup>Coefficients du binôme

<sup>3</sup>Configurations de l'échiquier

### Exemple

Les étudiants du cours de Math-Info suivent tous au moins un cours de langues parmi Anglais, Espagnol et Italien. 43 suivent Anglais, 21 Espagnol et 16 Italien. Il y en a 8 qui suivent Espagnol et Italien, 10 qui suivent Anglais et Italien et 15 qui suivent Anglais et Espagnol. Enfin, seulement 3 suivent les trois cours de langues. Combien d'étudiants y a-t-il dans le cours de Math-Info? **Compter les surjections**

La formule de Sylvestre nous permet de prouver le résultat suivant

**Théorème :** Le nombre de surjections d'un ensemble à  $m$  éléments vers un ensemble à  $n$  éléments est

$$S_n^m = n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^m$$

$$= \sum_{p=0}^n (-1)^p C_n^p (n-p)^m$$

### Toujours sur les ensembles

L'analogie avec la cardinalité des ensembles permet d'établir facilement

$$\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n \quad (4)$$

### Convolution de Vandermonde

**Théorème :** Si  $n, m \geq k$ , alors

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i C_m^{k-i} \quad (5)$$

### Autres égalités remarquables

$$C_n^n = 1 \quad (6)$$

$$C_n^0 = 1 \quad (7)$$

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (8)$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (9)$$

## Combinaisons

**Définition :** Une **combinaison** de longueur  $k$  d'un ensemble  $E$  de  $n$  éléments est un sous-ensemble de  $k$  éléments de  $E$ . On note  $C_n^k$  le nombre des combinaisons de longueur  $k$  sur un ensemble de  $n$  éléments.

**Proposition :** Chaque combinaison d'ordre  $k$  donne lieu à  $k!$  arrangements, donc

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (1)$$

### La formule du binôme

Les  $C_n^k$  sont aussi appelés **coefficients binomiaux** en raison du résultat suivant

**Proposition :**

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i} \quad (2)$$

**Corollaire :** on peut déduire de la formule précédente l'équation

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0 \quad (3)$$

### Application : la formule de Sylvestre

Notons  $|A|$  la cardinalité d'un ensemble  $A$ .

Nous avons la formule remarquable suivante :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

$$= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$$= \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}| \right)$$

### Calculer les valeurs des combinaisons

Ces égalités sont la clé du **triangle de Pascal**<sup>4</sup>, une méthode itérative de construction des valeurs des  $C_n^k$  :

	$k$	0	1	2	3	4
$n$						
0		1				
1		1	1			
2		1	2	1		
3		1	3	3	1	
4		1	4	6	4	1
5		1				

### Comment calculer sur ordinateur

Comparons les programmes suivants :

```
(* compter avec la forme close *)
let rec fact = function 0 -> 1 | n-> n*(fact (n-1));;
let c (n,k) = fact(n)/(fact(n-k)*fact(k));;
(* compter avec la forme récursive *)
let rec c = function
  (n,0) -> 1
| (n,k) when n=k -> 1
| (n,k) -> (c (n-1,k-1)) + (c (n-1,k));;
```

Lequels choisiriez-vous ? Pourquoi ?

### Comment calculer vite

```
(* a la Pascal, jusqu'à C_{100}^{100} *)
let rec c =
  let triangle = Array.create_matrix 100 100 0 in
  let check e (n,k) =
    if triangle.(n).(k) = 0 then
      let r = e (n,k)
      in triangle.(n).(k) <- r; r
    else triangle.(n).(k) in
  function
    (n,0) -> 1
```

<sup>4</sup>En Italie, on l'appelle *triangle de Tartaglia*

```

| (n,k) when n=k -> 1
| (n,k) -> (check c (n-1,k-1)) + (check c (n-1,k));;

(* compter avec la forme recurrente, memoisee *)
let rec c =
  let memo = Hashtbl.create 16 in
  let memocheck e v =
    try let r = Hashtbl.find memo v in print_string "**"; r
    with _ -> let r = e v in Hashtbl.add memo v r; r in
  function
  (n,0) -> 1
  | (n,k) when n=k -> 1
  | (n,k) -> (memocheck c (n-1,k-1)) + (memocheck c (n-1,k));;

```

**Approximation de la factorielle**

On peut approximer la factorielle comme suit :

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \sum_{i=1}^n \ln i$$

$$\approx \int_1^n \ln x dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1$$

$$\approx n \ln n - n$$

d'où

$$n! \approx e^{n \ln n - n} = \frac{n^n}{e^n}$$

Stirling nous fournit une approximation plus précise

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Calculer avec Stirling**

```

let stfact n = sqrt(2*.3.1428*.n)*.(n/(exp 1))**.n;;
let cst (n,k) = let nf = float n and kf = float k in
  truncate ((stfact nf)/.(stfact kf) *. (stfact (nf -.kf)));;

(* comparons *)
tabulate (fun n -> c (n, n/2)) 1 20;;
- : int list =
[1; 2; 3; 6; 10; 20; 35; 70; 126; 252; 462; 924; 1716; 3432; 6435; 12870;
24310; 48620; 92378; 184756]
tabulate (fun n -> cst (n, n/2)) 1 20;;

```

```

- : int list =
[0; 2; 3; 6; 10; 20; 36; 72; 129; 258; 472; 943; 1749; 3493; 6542; 13070;
24666; 49290; 93587; 187043]

```

**Enumerer les combinaisons**

Plus remarquablement, elles sont la clé du programme récursif suivant, qui engendre effectivement toutes les combinaisons.

```

(* engendrer *)
let addprefix v ll = List.map (fun l -> v::l) ll
let rec initsegment b = function 0 -> []
| n -> b::(initsegment (b+1) (n-1))

let rec comb b = function
  (n,0) -> [[]]
  | (n,m) when n=m -> [initsegment b n]
  | (n,m) -> (comb (b+1) (n-1,m))
    @ (addprefix b (comb (b+1) (n-1,m-1)))

```

**Exemples**

**Exemple : le LOTO**

Combien de grilles simples différentes peut-on jouer ?

**Exemples**

**Exemple : les échecs**

Combien de configuration différentes peut-on obtenir en plaçant les pièces sur l'échiquier ?



**Attention :** pour chaque couleur, les pions sont indistinguables entre eux, comme les tours, les cavaliers et les fous.

**L'équation des échecs : permutations avec objets indistinguables**

On apprend du cas des échecs que si on dispose de  $n$  objets, composés de  $k$  groupes de  $n_i$  objets indistinguables, alors il y a

$$C_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

façons de les permuter.

Ceci est aussi le nombre de façon de distribuer  $n$  objets différents dans  $k$  boîtes différentes de façon à mettre  $n_i$  objets dans la  $i$ -ème boîte.

On les appelle aussi...

**Coefficients multinomiaux**

On a en effet

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} C_n^{n_1, \dots, n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}$$

**Arrangements avec répétition**

**Définition :** un **arrangement avec répétition** de longueur  $k$  d'un ensemble  $E$  de  $n$  éléments est une *suite ordonnée* de  $k$  éléments de  $E$ , pas nécessairement distincts.

**Exemple :** si chaque curseur a  $n$  positions, et il y a  $k$  curseurs, combien de configuration peut avoir cet égalisateur ?



Les arrangements avec répétition de longueur  $k$  sur un ensemble de  $n$  éléments sont  $n^k$ .

**Combinaisons avec répétition**

**Définition :** Une **combinaison avec répétition** de longueur  $k$  d'un ensemble  $E$  de  $n$  éléments est une *suite non ordonnée* de  $k$  éléments de  $E$ , pas nécessairement distincts.

Les combinaisons avec répétition de longueur  $k$  sur un ensemble de  $n$  éléments sont  $C_{n+k-1}^{n-1}$ .

**Exemple :** Si chaque curseur a  $n$  positions, et il y a  $k$  curseurs, combien de configurations de même puissance  $p \leq n$  peut avoir cet égalisateur ?



**Exemple :** Si chaque curseur a  $n$  positions, et il y a  $k$  curseurs, combien de configurations de même puissance  $p \leq nk$  peut avoir cet égalisateur ?



**Preuve :** Il faut utiliser tout notre bagage d'astuces. Il faut appliquer Sylvester pour déduire la vraie valeur par différence entre le nombre total et celui des dispositions impossibles... Le nombre total de dispositions possibles des curseurs, si on n'avait pas la contrainte  $x_i \leq n$ , serait bien  $C_{p+k-1}^{k-1}$ . Mais il faut alors enlever les dispositions "impossibles", correspondant à la violation de la contrainte.

Donc on a

$$Dp = C_{p+k-1}^{k-1} \setminus \{dispositions \text{ avec quelques } x_i > n\}$$

mais ce dernier ensemble est égale à

$$\bigcup_{1 \leq i \leq k} \{dispositions \text{ avec } x_i > n\}$$

et sa taille est, par Sylvester (notons  $D_i$  les ensembles de la famille de tout à l'heure) :

$$\sum_{1 \leq j \leq k} \left( \sum_{i_1 < \dots < i_j} (-1)^{j-1} |D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_j}| \right)$$

Or, le calcul de  $|D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k}|$  est assez facile : on sait que  $x_{i_1}, \dots, x_{i_j}$  valent au moins  $n+1$ , parce-que ils violent la contrainte, donc on donne

$n+1$  aux  $j$  curseurs, il nous reste  $p - (n+1)j$  à distribuer, avec répétitions, parmi les  $k$  curseurs, ce qui fait donc  $\binom{p - (n+1)j + k - 1}{p - (n+1)j + k - 1}$ . On a alors

$$Dp = \binom{k-1}{p+k-1} - \sum_{1 \leq j \leq k} \left( \sum_{i_1 < \dots < i_j} (-1)^{j-1} \binom{k-1}{p - (n+1)j + k - 1} \right)$$

$$Dp = \binom{k-1}{p+k-1} - \sum_{1 \leq j \leq k} (-1)^{j-1} \binom{k-1}{p - (n+1)j + k - 1} \left( \sum_{i_1 < \dots < i_j} (-1)^{j-1} \right)$$

$$Dp = \binom{k-1}{p+k-1} - \sum_{1 \leq j \leq k} (-1)^{j-1} \binom{k-1}{p - (n+1)j + k - 1} \binom{j}{k}$$

$$Dp = \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \binom{k-1}{p - (n+1)j + k - 1} \binom{j}{k}$$

Mais attention, comme  $p \leq nk$ , il faut arrêter la somme au premier  $j$  t.q.  $(n+1)(j+1) > nk$

#### Applications

Les combinaisons avec répétitions permettent de compter les solutions des équations de la forme

$$x_1 + \dots + x_k = p$$

La solution du cas de l'égalisateur nous permet de compter les solutions des équations de la forme

$$x_1 + \dots + x_k = p$$

avec des contraintes  $x_i \leq n$  (ou plus généralement  $x_i \leq n_i$ ). Dans la solution de l'égalisateur on a appris à compter aussi<sup>5</sup> les solutions des équations de la forme

$$x_1 + \dots + x_k = p$$

avec des contraintes  $x_i \geq n$  (ou plus généralement  $x_i \geq n_i$ ).

<sup>5</sup>en réelité, on a vu que c'est plus facile