

Le principe d'induction bien fondée

Preuves par induction bien fondée

Une **preuve par induction bien fondée** est une méthode de raisonnement qui vise à établir une propriété pour tous les éléments d'un ensemble.

Elle s'appuie sur un **ordre strict bien fondé** de l'ensemble des éléments pour lequel on cherche à établir la propriété.

Preuves par induction bien fondée

Soit \mathcal{A} un ensemble et $>$ un ordre strict bien fondé sur \mathcal{A} . Démontrer une propriété P sur \mathcal{A} revient à

– Montrer que la propriété P est vérifiée par **tous les éléments minimaux** de $>$:

pour tout $x \in \mathcal{A}$ minimal on a $P(x)$

– Montrer que la propriété P est vérifiée par **tous les éléments non minimaux** de \mathcal{A} en sachant qu'elle est vérifiée par ses prédécesseurs :

Si pour tout $z \in \mathcal{A}$ t.q. $z < x$ on a $P(z)$, alors on a $P(x)$

Principe d'induction bien fondée

Un ensemble \mathcal{A} , un ordre strict $>$ bien fondé et une propriété P sur \mathcal{A}

Principe d'induction :

Si

1. "pour tout élément minimal $y \in \mathcal{A}$ on a $P(y)$ "
2. "le fait que $P(z)$ soit vérifiée pour tout élément $z < x$ implique $P(x)$ "

alors

"pour tout $x \in \mathcal{A}$ on a $P(x)$ "

Exemple I

Soit \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre

$m > n$ ssi $m \neq n$, 1 et m est divisible par n

1

Preuves par récurrence sur un ensemble inductif

Soit \mathcal{A} un ensemble inductif sur \mathcal{X} sous F , c'est à dire le plus petit ensemble t.q.

- $\{x_1, \dots, x_k\} = \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$
- pour toute fonction $f \in F$ d'arité n , si $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, alors $f(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}$.

Démontrer une propriété P sur \mathcal{A} revient à

– Montrer que la propriété P est vérifiée par **tous les cas de base** de la définition de l'ensemble :

$P(x_1)$ et ... et $P(x_k)$

– Montrer que la propriété P est **préservée par toute opération de construction** $f \in F$:

pour tout $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, pour toute fonction $f \in F$ d'arité n , si $P(a_1)$ et ... et $P(a_n)$ alors $P(f(a_1, \dots, a_n))$

Quelle relation entre l'induction bien fondée et récurrence ?

Corollaire : Le principe d'induction bien fondée est correct pour les ensembles inductifs.

Exemple I

Les entiers naturels avec $\mathcal{X} = \{0\}$ et $F = \{plus1\}$.

$P(n) =_{def} 8^n - 1$ est un multiple de 7.

P est-elle vraie sur les entiers naturels ?

Exemple II

Les entiers naturels avec $\mathcal{X} = \{0\}$ et $F = \{plus1\}$.

$P(n) =_{def} 8^n + 1$ est un multiple de 7.

P est-elle vraie sur les entiers naturels ?

Exemple III

Les mots sur un alphabet A avec $\mathcal{X} = \{\epsilon\}$ et $F = \{a_j a \mid a \in A\}$.

Soit $concat$ l'opération définie par :

3

L'ordre $>$ est strict et bien fondé. Les éléments minimaux sont les nombres premiers.

Soit P la propriété

$P(n)$ ssi n possède une factorisation en nombres premiers

Montrer que P est vrai pour tout entier $n \geq 2$.

Exemple II

Montrer que le programme suivant termine sur les entiers naturels positifs.

```
while m <> n do
begin
  if m > n
  then m := m-n
  else n := n-m
end
```

Exemple III

Montrer que la fonction d'Ackerman termine sur les entiers naturels.

```
Ackerman(0,n) = n+1
Ackerman(m+1,0) = Ackerman(m,1)
Ackerman(m+1,n+1) = Ackerman(m,Ackerman(m+1,n))
```

Ce principe est-il toujours bien défini ?

Théorème :

Si $>$ est bien fondé, alors le principe d'induction est correct.

Théorème :

Si le principe d'induction est correct, alors $>$ est bien fondé.

Preuves par récurrence

Une **preuve par récurrence** est une méthode de raisonnement qui vise à établir une propriété pour tous les éléments d'un ensemble inductif

Elle s'appuie sur une **définition récursive** de l'ensemble des éléments pour lequel on cherche à établir la propriété.

2

```
concat(ε,k) = k
concat(a_j a(l),k) = a_j a(concat(l,k))
```

Montrer que $concat$ est une opération associative.

Exemple IV

Les arbres binaires avec $\mathcal{X} = \{nil\}$ et $F = \{arb\}$ où $arb(a_1, a_2)$ est un arbre binaire si a_1, a_2 sont deux arbres binaires.

Soit :

```
n(a) = nb de noeuds internes de a
f(a) = nb de feuilles de a
```

Montrer que $f(a) = n(a) + 1$.

Exemple V

Les expressions sur $\{a, b\}$ avec S et M avec $\mathcal{X} = \{a, b\}$ et $F = \{S, M\}$, où S et M vérifient les propriétés suivantes :

```
S(a,a) = a      M(a,a) = a      S(S(e1,e2),e3) = S(e1,S(e2,e3))
S(a,b) = b      M(a,b) = a      M(M(e1,e2),e3) = M(e1,M(e2,e3))
S(b,a) = b      M(b,a) = a      S(M(e1,e2),e3) = M(S(e1,e3),S(e2,e3))
S(b,b) = b      M(b,b) = b      M(S(e1,e2),e3) = S(M(e1,e3),M(e2,e3))
```

Démontrer $S(e,b) = b$, $S(e,a) = e$, $M(e,b) = e$ et $M(e,a) = a$.

4