Le principe d'induction bien fondée

Preuves par induction bien fondée

Une preuve par induction bien fondée est une méthode de raisonnement qui vise à établir une propriété pour tous les éléments d'un ensemble.

Elle s'appuie sur un ordre strict bien fondé de l'ensemble des éléments pour lequel on cherche à établir la propriété.

Preuves par induction bien fondée

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble et $>$ un ordre strict bien fondé sur $\mathcal{A}$. Démontrer une propriété P sur $\mathcal{A}$ revient à

– Montrer que la propriété P est vérifiée par tous les éléments minimaux de $>$:

$$\text{pour tout } x \in \mathcal{A} \text{ minimal on a } P(x)$$

– Montrer que la propriété P est vérifiée par tous les éléments non minimaux de $\mathcal{A}$ en sachant qu'elle est vérifiée par ses prédécesseurs :

$$\text{Si pour tout } \ z \in \mathcal{A} \text{ t.q.} z < x \text{ on a } P(z), \text{alors on a } P(x)$$

Principe d'induction bien fondée

Un ensemble $\mathcal{A}$, un ordre strict $>$ bien fondé et une propriété P sur $\mathcal{A}$

Principe d'induction :

Si

1. "pour tout élément minimal $y \in \mathcal{A}$ on a $P(y)$"
2. "le fait que $P(z)$ soit vérifiée pour tout élément $z<x$ implique $P(x)$"

alors

"pour tout $x \in \mathcal{A}$ on a $P(x)$"

Exemple I

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre

$$m > n \text{ ssi } m \neq n, 1 \text{ et } m \text{ est divisible par } n$$

L'ordre $>$ est strict et bien fondé. Les éléments minimaux sont les nombres premiers.

Soit P la propriété

$$P(n) \text{ ssi } n \text{ possède une factorisation en nombres premiers}$$

Montrer que P est vrai pour tout entier $n \geq 2$.

Exemple II

Montrer que le programme suivant termine sur les entiers naturels positifs.

```
while m <> n do
begin
    if m > n
       then m:= m-n
       else n:= n-m
end
```

Exemple III

Montrer que la fonction d'Ackerman termine sur les entiers naturels.

Ackerman(0,n)	=	n+1
Ackerman(m+1,0)	=	Ackerman(m,1)
Ackerman(m+1,n+1)	=	Ackerman(m,Ackerman(m+1,n))

Ce principe est-il toujours bien défini ?

Théorème :

Si $>$ est bien fondé, alors le principe d'induction est correct.

Théorème :

Si le principe d'induction est correct, alors $>$ est bien fondé.

Preuves par récurrence

Une preuve par récurrence est une méthode de raisonnement qui vise à établir une propriété pour tous les éléments d'un ensemble inductif

Elle s'appuie sur une définition récursive de l'ensemble des éléments pour lequel on cherche à établir la propriété.

Preuves par récurrence sur un ensemble inductif

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble inductif sur $\mathcal{X}$ sous F, c'est à dire le plus petit ensemble t.q.

- $\{x_1, \ldots, x_k\} = \mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$
- pour toute fonction $f \in F$ d'arité n, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, alors $f(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}$.

Démontrer une propriété P sur $\mathcal{A}$ revient à

- Montrer que la propriété P est vérifiée par tous les cas de base de la définition de l'ensemble :

$$P(x_1) \text{ et } \ldots \text{et } P(x_k)$$

- Montrer que la propriété P est préservée par toute opération de construction $f \in F$:

$$\begin{array}{l} \text{pour tout } a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}, \text{pour toute fonction } f \in F \text{ d'arité } n, \\ \text{si } P(a_1) \text{ et } \ldots \text{et } P(a_n) \text{ alors } P(f(a_1, \ldots, a_n)) \end{array}$$

Quelle relation entre l'induction bien fondée et recurrence ?

Corollaire : Le principe d'induction bien fondée est correct pour les ensembles inductifs.

Exemple I

Les entiers naturels avec $\mathcal{X} = \{0\}$ et $F = \{plus1\}$.

$P(n) =_{def} 8^n - 1$ est un multiple de 7.

P est-il vraie sur les entiers naturels ?

Exemple II

Les entiers naturels avec $\mathcal{X} = \{0\}$ et $F = \{plus1\}$.

$P(n) =_{def} 8^n + 1$ est un multiple de 7.

P est-il vraie sur les entiers naturels ?

Exemple III

Les mots sur un alphabet A avec $\mathcal{X} = \{\epsilon\}$ et $F = \{aj_a \mid a \in A\}$.

Soit $concat$ l'opération définie par :

$$\begin{array}{lcl} concat(\epsilon, k) & = & k \\ concat(aj_a(l), k) & = & aj_a(concat(l, k)) \end{array}$$

Montrer que $concat$ est une opération associative.

Exemple IV

Les arbres binaires avec $\mathcal{X} = \{nil\}$ et $F = \{arb\}$ où $arb(a_1, a_2)$ est un arbre binaire si a_1, a_2 sont deux arbres binaires.

Soit :

$$\begin{array}{lcl} n(a) & = & \text{nb de noeuds internes de } a \\ f(a) & = & \text{nb de feuilles de } a \end{array}$$

Montrer que $f(a) = n(a) + 1$.

Exemple V

Les expressions sur $\{a, b\}$ avec S et M avec $\mathcal{X} = \{a, b\}$ et $F = \{S, M\}$, où S et M vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lclclclcl} S(a,a) & = & a & M(a,a) & = & a & S(S(e_1,e_2),e_3) & = & S(e_1,S(e_2,e_3)) \\ S(a,b) & = & b & M(a,b) & = & a & M(M(e_1,e_2),e_3) & = & M(e_1,M(e_2,e_3)) \\ S(b,a) & = & b & M(b,a) & = & a & S(M(e_1,e_2),e_3) & = & M(S(e_1,e_3),S(e_2,e_3)) \\ S(b,b) & = & b & M(b,b) & = & b & M(S(e_1,e_2),e_3) & = & S(M(e_1,e_3),M(e_2,e_3)) \end{array}$$

Démontrer $S(e, b) = b$, $S(e, a) = e$, $M(e, b) = e$ et $M(e, a) = a$.