

Notions mathématiques préliminaires

Ensembles

Définition : Le **produit cartésien** de n ensembles $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$ est l'ensemble de n -uplets $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathcal{A}_i\}$. Si $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pour tout i , on note simplement par $\mathcal{A}^n$ le produit $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$.

Définition : Soient deux ensembles t.q. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$.

- L'**intersection** de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{E} \mid e \in \mathcal{A} \text{ et } e \in \mathcal{B}\}$
- L'**union** de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{E} \mid e \in \mathcal{A} \text{ ou } e \in \mathcal{B}\}$
- La **différence** $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{e \in \mathcal{E} \mid e \in \mathcal{A} \text{ et } e \notin \mathcal{B}\}$
- Le **complémentaire** de $\mathcal{A}$ est $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{A} = \{e \in \mathcal{E} \mid e \notin \mathcal{A}\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est l'ensemble qui contient toutes les **parties** de l'ensemble $\mathcal{A}$.

Relations

Définition : Une **relation n-aire** sur $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$.

Définition : Soit $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ une relation **binaire**.

- R est **réflexive** ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \in R$. R est **irréflexive** ssi pour tout $x \in \mathcal{A}$, $(x, x) \notin R$.
- R est **symétrique** si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ implique $(y, x) \in R$. R est **anti-symétrique** si pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R$ implique $x = y$.
- R est **transitive** si pour tout $x, y, z \in \mathcal{A}$, $(x, y) \in \mathcal{A}$ et $(y, z) \in R$ implique $(x, z) \in R$.

Relations d'équivalence

Une **relation d'équivalence** est une relation réflexive, symétrique et transitive.

La **classe d'équivalence** d'un élément $a \in \mathcal{A}$ par rapport à une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est l'ensemble $[a] = \{b \in \mathcal{A} \mid a \mathcal{R} b\}$.

1

Propriétés des fonctions

Définition : Une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est **injective** ssi pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, $f(x) = f(y)$ implique $x = y$.

Définition : Une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est **surjective** ssi pour tout $y \in \mathcal{B}$ il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) = y$.

Définition : Une fonction est **bijjective** ssi elle est injective et surjective.

Préordres, ordres

Définition :

- Un **préordre** est une relation réflexive et transitive.
- Un **ordre** ou **ordre partiel** est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive.

Notation : $\geq$

Il existe une construction standard qui permet de construire un ordre à partir d'un préordre :

Théorème : Si $\succsim \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ est un préordre, alors :

- la relation $\sim = \{(x, y) \mid x \succsim y \text{ et } y \succsim x\}$ est une relation d'équivalence
- la relation $\geq = \{([x], [y]) \mid x \succsim y\}$ induite sur les classes d'équivalence de $\sim$ est un ordre

Définition : Un **ordre strict** est une relation irréflexive et transitive.

Notation : $>$

Définition : Un ordre strict sur $\mathcal{A}$ est **bien fondé** ssi il n'existe aucune chaîne de la forme $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$, où tout $a_i \in \mathcal{A}$.

L'ordre produit

On considère le **produit cartésien** de n ensembles $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$. Si chaque $\mathcal{A}_i$ est muni d'un ordre strict $\succ_i$, alors l'**ordre produit** est défini par

$(a_1, \dots, a_n) \succ_{\times} (b_1, \dots, b_n)$ ssi

- $(a_i \succ_i b_i)$ ou $a_i = b_i$ pour tout $i = 1 \dots n$,
- et $a_j \succ_j b_j$ pour au moins un indice j

Lemme : La relation $\succ_{\times}$ est bien fondée ssi chaque relation $\succ_i$ est bien fondée.

3

Congruences

Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est une **congruence** par rapport à une fonction n -aire f ssi pour tout $n \geq 0$, pour tout $a_1, \dots, a_n$ et pour tout $b_1, \dots, b_n$

$$a_1 \mathcal{R} b_1 \text{ et } \dots \text{ et } a_n \mathcal{R} b_n \text{ implique } f(a_1, \dots, a_n) \mathcal{R} f(b_1, \dots, b_n)$$

Composition de relations

Définition : Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, alors la **composition** de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{R}$ est une relation dans $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$ t.q. $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{C} \mid \exists z \in \mathcal{B} (x, z) \in \mathcal{R} \text{ et } (z, y) \in \mathcal{S}\}$.

Fonctions

Définition : Une fonction f entre deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, notée $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, est une relation sur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ t.q. pour tout x, y, z si $(x, y) \in f$ et $(x, z) \in f$, alors $y = z$.

Notation : On écrit $f(x)$ pour dénoter l'**unique** élément y t.q. $(x, y) \in f$ et $f(\mathcal{C}) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in \mathcal{C}, f(x) = y\}$.

On note $id_{\mathcal{A}}$ la fonction **identité** sur $\mathcal{A}$ donnée par $id_{\mathcal{A}}(x) = x$.

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une fonction.

- Le **domaine** de f est $Dom(f) = \{x \in \mathcal{A} \mid \exists y \in \mathcal{B}, (x, y) \in f\}$
- L'**image** de f est $Im(f) = \{y \in \mathcal{B} \mid \exists x \in \mathcal{A}, (x, y) \in f\}$
- L'**inverse** de f est $f^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{A} \mid (x, y) \in f\}$

Composition de fonctions

Définition :

- La **composition** de $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ avec $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est la fonction $f \circ g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, où $f \circ g(x) = f(g(x))$.
- La **n-composition** de f avec **elle-même**, notée f^n , est défini par récurrence sur n :
 - Si $n = 0$, alors $f^0 = id$
 - Si $n > 0$, alors $f^n = f \circ f^{n-1}$

Exercice : Soit $n > 0$. Montrer que $f^n = f^{n-1} \circ f$.

2

L'ordre lexicographique

Soit $>_{\mathcal{A}_i}$ un ordre strict sur l'ensemble $\mathcal{A}_i$.

Ordre lexicographique sur le produit de 2 ensembles :

$$(x, y) >_{lex} (x', y') \text{ ssi } (x >_{\mathcal{A}_1} x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y >_{\mathcal{A}_2} y')$$

Exemple :

$$(4, "s") >_{lex} (3, "s") >_{lex} (2, "q") >_{lex} (2, "h") >_{lex} (2, "e") >_{lex} (1, "b") >_{lex} (0, "a")$$

Ordre lexicographique (cas général)

Si chaque $\mathcal{A}_i$ est muni d'un ordre strict $\succ_i$, alors l'**ordre lexicographique** est défini par

$$a_1 \succ_{\mathcal{A}_1}^{lex} b_1 \text{ ssi } a_1 \succ_1 b_1 \\ (a_1, \dots, a_n) \succ_{\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n}^{lex} (b_1, \dots, b_n) \text{ ssi} \\ (a_1 \succ_1 b_1) \text{ ou} \\ a_1 = b_1 \text{ et } (a_2, \dots, a_n) \succ_{\mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n}^{lex} (b_2, \dots, b_n)$$

Théorème : L'ordre lexicographique $\succ_{\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n}^{lex}$ est bien fondé ssi chaque ordre strict $\succ_{\mathcal{A}_i}$ est bien fondé.

Avertissement : $\succ_{\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n}^{lex}$ n'est pas exactement l'ordre du dictionnaire : il faut étendre $\succ_{lex}$ aux séquences finies sur l'alphabet pour l'obtenir.

Une application :

$$\begin{aligned} \text{Ackerman}(0, n) &= n+1 \\ \text{Exemple : } \text{Ackerman}(m+1, 0) &= \text{Ackerman}(m, 1) \\ \text{Ackerman}(m+1, n+1) &= \text{Ackerman}(m, \text{Ackerman}(m+1, n)) \end{aligned}$$

Ordres multi-ensembles

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble. Un **multi-ensemble** de base $\mathcal{A}$ est une fonction $\mathcal{M} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$.

Le multi-ensemble $\mathcal{M}$ est **fini** si $\mathcal{M}(x) > 0$ seulement pour un nombre fini d'éléments de $\mathcal{A}$.

Notation : $\llbracket a, a, b \rrbracket$.

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux multi-ensembles. Le **multi-ensemble union** est définie par $\mathcal{M} \uplus \mathcal{N}(a) = \mathcal{M}(a) + \mathcal{N}(a)$.

4

Ordres multi-ensembles

Soit $\succ$ un ordre strict. La relation $\succ_{mul}$ associée est donnée par la **fermeture transitive** de la relation $\succ_{mul}^1$:

$$\mathcal{M} \sqcup \{\{x\}\} \succ_{mul}^1 \mathcal{M} \sqcup \{y_1, \dots, y_n\}, \text{ où } n \geq 0 \text{ et } \forall i, x \succ y_i.$$

Exemple : $\{\{5, 3, 1, 1\}\} \succ_{mul} \{\{4, 3, 3, 1\}\}$.

Exercice : Si $\succ$ est un ordre strict, alors $\succ_{mul}$ est un ordre strict.

Théorème : Soit $\succ$ un ordre strict sur $\mathcal{A}$, alors $\succ$ est bien fondé ssi $\succ_{mul}$ est bien fondé.

Exercice : Un homme possède une somme d'argent en euros. Chaque jour il procède de la façon suivante :

- soit il jette une pièce de monnaie dans une fontaine,
- ou bien il change l'un de ses billets à la banque.

Montrer que ce processus termine, c'est à dire, que dans un temps fini l'homme reste sans argent.

Majorants/minorants et bornes supérieures/inférieures

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble muni d'un ordre $\leq$. Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.

Définition :

Un **majorant** de $\mathcal{A}$ est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $y \leq x$.

Un **minorant** de $\mathcal{A}$ est un $x \in \mathcal{E}$ t.q. pour tout $y \in \mathcal{A}$, $x \leq y$.

La **borne supérieure** de $\mathcal{A}$, notée $\sup(\mathcal{A})$, est le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$ (si z est un majorant de $\mathcal{A}$ alors $\sup(\mathcal{A}) \leq z$).

La **borne inférieure** de $\mathcal{A}$, notée $\inf(\mathcal{A})$, est le plus grand des minorants de $\mathcal{A}$ (si z est un minorant de $\mathcal{A}$ alors $z \leq \inf(\mathcal{A})$).

Fonctions monotones et points fixes

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ une fonction et soient $\leq_{\mathcal{A}}, \leq_{\mathcal{B}}$ deux ordres sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement.

La fonction f est **monotone** ssi $x \leq_{\mathcal{A}} y$ implique $f(x) \leq_{\mathcal{B}} f(y)$.

Définition : Soit $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une fonction.

Un **point fixe** de f est un élément $x \in \mathcal{A}$ t.q. $f(x) = x$.

Le **plus petit point fixe** de f est $\inf(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.

Le **plus grand point fixe** de f est $\sup(\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = x\})$.