
Induction sur les formules propositionnelles

Syntaxe du calcul propositionnel (rappel)

Soit \mathcal{R} en ensemble dénombrable de lettres propositionnelles.

Définition : L'ensemble \mathcal{F}_{prop} de formules du calcul propositionnel, est le plus petit ensemble t.q.

- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}_{prop}$
- Si $A \in \mathcal{F}_{prop}$, alors $\neg A \in \mathcal{F}_{prop}$.
- Si $A, B \in \mathcal{F}_{prop}$, alors $\vee(A, B), \wedge(A, B), \rightarrow(A, B) \in \mathcal{F}_{prop}$.

Exemple : $\neg(p) \quad \vee(p, p) \quad \rightarrow(\wedge(p, q), \neg(r))$
Notation simplifiée : $\neg p \quad p \vee p \quad (p \wedge q) \rightarrow \neg r$

Le calcul propositionnel en OCAML (rappel)

```
# type fprop = L of int | Neg of fprop |  
             Ou of fprop * fprop |  
             Et of fprop * fprop |  
             Impl of fprop * fprop;;  
  
# let f1 = Et(Ou(L(1),L(2)),Neg(L(3)));;  
val f1 : fprop = Et (Ou (L 1, L 2), Neg (L 3))
```

Les formules comme des arbres

Les formules constituent un ensemble paramétré par deux types 'a et 'b, où chaque étiquette d'une feuille est de type 'a et chaque étiquette d'un nœud interne unaire ou binaire est de type 'b.

Ceci donne une nouvelle définition du type ('a, 'b) AbinIII :

L'ensemble ('a, 'b) AbinIII est le plus petit ensemble t.q.

- Si m est de type 'a, alors $feuille(m) \in ('a, 'b) AbinIII$
- Si $c \in ('a, 'b) AbinIII$ et o est de type 'b, alors $noeud1(o, c) \in ('a, 'b) AbinIII$.
- Si $c_1, c_2 \in ('a, 'b) AbinIII$ et o est de type 'b, alors $noeud2(o, c_1, c_2) \in ('a, 'b) AbinIII$.

Un type abstrait pour ('a, 'b) abinII

Domaine :

('a, 'b) abinII

Opérations de construction :

cons_f: 'a → ('a, 'b) abinII

cons_u: 'b × ('a, 'b) abinII → ('a, 'b) abinII

cons_b: 'b × ('a, 'b) abinII × ('a, 'b) abinII → ('a, 'b) abinII

Opérations de test :

est_f, est_u, est_b: ('a, 'b) abinII → booléen

Opérations d'accès :

etiquette_feuille: ('a, 'b) abinII → 'a

etiquette_noeud: ('a, 'b) abinII → 'b

fils_u, fils_g, fils_d: ('a, 'b) abinII → ('a, 'b) abinII

Le calcul propositionnel en OCAML (deuxième possibilité)

```
# type ('a, 'b) abinII =  
  F of 'a |  
  N1 of 'b * ('a, 'b) abinII |  
  N2 of 'b * ('a, 'b) abinII * ('a, 'b) abinII;;  
  
# type op = Neg | Et | Ou | Impl;;  
  
# let f1 = N2(Et, N2(Ou, F(1), F(2)), N1(Neg, F(3)));;  
val f1 : (int, op) abinII =  
  N2 (Et, N2 (Ou, F 1, F 2), N1 (Neg, F 3))
```

Fonctions récursives sur les formules

Formules \subseteq Arbres, donc

pour définir une fonction sur les formules on peut utiliser l'un des schémas récursifs sur les arbres.

Schéma récursif pour les formules

$$\begin{aligned} f(a) &= g_1(a, f(\text{fils}_u(a))) \\ &\quad \text{Si } \text{est}_u(a) \\ f(a) &= g_2(a, f(\text{fils}_g(a)), f(\text{fils}_d(a))) \\ &\quad \text{Si } \text{est}_b(a) \end{aligned}$$

Quelques fois g_1 et g_2 se “ressemblent” beaucoup.

Cas particulier : lors que $\text{est}_f(a)$

Exemple : nb de lettres d'une formule

```
# let rec nblettres f = match f with
  F(_)      -> 1
  | N1(_,a)  -> nblettres a
  | N2(_,a,b)-> nblettres a + nblettres b ;;
```

Exercice : Qui sont les fonctions g_1 et g_2 ?

Preuve de propriétés par induction sur les formules

Exemple : Montrer que toute formule A est équivalente à une formule A' où le connecteur \neg se trouve uniquement à gauche d'une lettre propositionnelle.

Calculs des séquents

Définition : Un **séquent** est un couple de la forme $\Delta \triangleright \Gamma$, où Δ et Γ sont de multi-ensembles de formules.

Exemple :

$$\begin{array}{l} p, p, p \rightarrow q \triangleright r, p \vee s \\ p \rightarrow q \triangleright \\ \triangleright p, s \\ \triangleright \end{array}$$

Définition d'un calcul des séquents

– On fixe des **axiomes** (des **séquents** particuliers)

– On fixe des **règles d'inférence** de la forme $\frac{\Delta_1 \triangleright \Gamma_1 \dots \Delta_n \triangleright \Gamma_n}{\Delta \triangleright \Gamma}$

Le système \mathcal{G}

Axiome : $\Delta, A \triangleright \Gamma, A$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \triangleright \Gamma, A}{\Delta, \neg A \triangleright \Gamma} (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \triangleright \Gamma}{\Delta \triangleright \Gamma, \neg A} (\neg d)$$
$$\frac{\Delta \triangleright A, \Gamma \quad \Delta, B \triangleright \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \triangleright \Gamma} (\rightarrow g) \quad \frac{\Delta, A \triangleright B, \Gamma}{\Delta \triangleright A \rightarrow B, \Gamma} (\rightarrow d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \triangleright \Gamma}{\Delta, A \wedge B \triangleright \Gamma} (\wedge g) \quad \frac{\Delta \triangleright A, \Gamma \quad \Delta \triangleright B, \Gamma}{\Delta \triangleright A \wedge B, \Gamma} (\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \triangleright \Gamma \quad \Delta, B \triangleright \Gamma}{\Delta, A \vee B \triangleright \Gamma} (\vee g) \quad \frac{\Delta \triangleright A, B, \Gamma}{\Delta \triangleright A \vee B, \Gamma} (\vee d)$$

Dérivation d'un séquent

Définition : La **dérivation** d'un séquent $\Gamma \triangleright \Delta$ à partir d'un ensemble de séquents Φ , notée $\Phi \vdash \Gamma \triangleright \Delta$, est un **arbre** fini tel que

- les nœuds sont des séquents
- chaque feuille est soit une formule de Φ , soit un axiome
- si S est le père des $S_1 \dots S_n$, alors S est obtenu par l'application d'une règle d'inférence sur $S_1 \dots S_n$.
- la racine de l'arbre est le séquent $\Gamma \triangleright \Delta$

Preuves et théorèmes

Définition : La **preuve** d'un séquent $\Gamma \triangleright \Delta$ est une dérivation de $\Gamma \triangleright \Delta$ à partir de l'ensemble vide de séquents. On dit dans ce cas que $\Gamma \triangleright \Delta$ est un **théorème**.

Conséquence logique (rappel)

Définition : Un **multi-ensemble de formules** Γ est **conséquence logique** d'un **multi-ensemble de formules** Δ , noté $\Delta \models \Gamma$, si toute interprétation qui satisfait toutes les formules de Δ satisfait au moins une formule de Γ .

Exemple :

$$p, p \rightarrow q \models q, r, s$$

Propriétés fondamentales du système \mathcal{G}

Théorème :(Correction) Le système \mathcal{G} est **correcte**, i.e., si $\Delta \triangleright \Gamma$ est un théorème, alors $\Delta \models \Gamma$.

Théorème :(Complétude) Le système \mathcal{G} est **complet**, i.e., si $\Delta \models \Gamma$, alors $\Delta \triangleright \Gamma$ est un théorème.

Donc, on peut utiliser \mathcal{G} comme alternative aux tables de vérité. Cette approche peut produire des économies très importantes !

Premier exemple de dérivation dans \mathcal{G}

$$\frac{\frac{p \triangleright q}{\triangleright \neg p, q} (\neg d)}{\neg q \triangleright \neg p} (\neg g)$$

On a une dérivation de $\neg q \triangleright \neg p$ à partir de $p \triangleright q$: $p \triangleright q \vdash \neg q \triangleright \neg p$.

Donc, on sait que $p \triangleright q \models \neg q \triangleright \neg p$, sans besoin de construire une table de vérité, dont la taille dépendrait du nombre de lettres propositionnelles en jeu.

Deuxième exemple de dérivation dans \mathcal{G}

$$\frac{\frac{p \triangleright \neg p}{\triangleright p \rightarrow \neg p} (\rightarrow d)}{\neg(p \rightarrow \neg p) \triangleright} (\neg g)$$

On a $p \triangleright \neg p \vdash \neg(p \rightarrow \neg p) \triangleright$ et donc aussi $p \triangleright \neg p \models \neg(p \rightarrow \neg p) \triangleright$

Comment transformer quelques dérivations dans \mathcal{G}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \triangleright \Gamma$ est dérivable dans le système \mathcal{G} , alors $\Delta, A \triangleright \Gamma$ et $\Delta \triangleright A, \Gamma$ le sont aussi.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \triangleright \Gamma$ est dérivable dans le système \mathcal{G} , alors $\Delta, A \triangleright \Gamma$ l'est aussi. Si $\Delta \triangleright \Gamma, A, A$ est dérivable dans le système \mathcal{G} , alors $\Delta \triangleright \Gamma, A$ l'est aussi.

Premier exemple de théorème dans \mathcal{G}

Modus ponens

$$\frac{\frac{p \triangleright p, q (ax)}{p, p \rightarrow q \triangleright q} (\rightarrow g)}{p, p \rightarrow q \triangleright q} (\rightarrow g)$$

On a $\vdash p, p \rightarrow q \triangleright q$, donc $p, p \rightarrow q \triangleright q$ est *valide*.

Deuxième exemple de théorème dans \mathcal{G}

Tiers exclu

$$\frac{\frac{p \triangleright p(ax)}{\triangleright p, \neg p} (\neg d)}{\triangleright p \vee \neg p} (\vee d)$$

On a $\vdash \triangleright p \vee \neg p$

Troisième exemple de théorème dans \mathcal{G}

Loi de Pierce

$$\frac{\frac{\frac{p \triangleright q, p(ax)}{\triangleright p \rightarrow q, p} (\rightarrow d)}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \triangleright p} (\rightarrow d)}{\triangleright ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\rightarrow d)$$

On a $\vdash \triangleright ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$