

Induction sur les formules propositionnelles

Syntaxe du calcul propositionnel (rappel)

Soit \mathcal{R} en ensemble dénombrable de lettres propositionnelles.

Définition : L'ensemble \mathcal{F}_{prop} de formules du calcul propositionnel, est le plus petit ensemble t.q.

- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}_{prop}$
- Si $A \in \mathcal{F}_{prop}$, alors $\neg A \in \mathcal{F}_{prop}$.
- Si $A, B \in \mathcal{F}_{prop}$, alors $\forall(A, B), \wedge(A, B), \rightarrow(A, B) \in \mathcal{F}_{prop}$.

Exemple : $\neg(p) \quad \vee(p, p) \quad \rightarrow(\wedge(p, q), \neg(r))$
Notation simplifiée : $\neg p \quad p \vee p \quad (p \wedge q) \rightarrow \neg r$

Le calcul propositionnel en OCAML (rappel)

```
# type fprop = L of int | Neg of fprop |
              Ou of fprop * fprop |
              Et of fprop * fprop |
              Impl of fprop * fprop;;

# let fl = Et(Ou(L(1), L(2)), Neg(L(3)));;
val fl : fprop = Et (Ou (L 1, L 2), Neg (L 3))
```

Les formules comme des arbres

Les formules constituent un ensemble paramétré par deux types 'a et 'b, où chaque étiquette d'une feuille est de type 'a et chaque étiquette d'un nœud interne unaire ou binaire est de type 'b.

Ceci donne une nouvelle définition du type ('a, 'b) AbinII :

L'ensemble ('a, 'b) AbinII est le plus petit ensemble t.q.

- Si m est de type 'a, alors $feuille(m) \in ('a, 'b) AbinII$
- Si $c \in ('a, 'b) AbinII$ et o est de type 'b, alors $noeud1(o, c) \in ('a, 'b) AbinII$.
- Si $c_1, c_2 \in ('a, 'b) AbinII$ et o est de type 'b, alors $noeud2(o, c_1, c_2) \in ('a, 'b) AbinII$.

1

Un type abstrait pour ('a, 'b) abinII

```
Domaine :
('a, 'b) abinII
Opérations de construction :
cons_f : 'a -> ('a, 'b) abinII
cons_u : 'b * ('a, 'b) abinII -> ('a, 'b) abinII
cons_b : 'b * ('a, 'b) abinII * ('a, 'b) abinII -> ('a, 'b) abinII
Opérations de test :
est_f, est_u, est_b : ('a, 'b) abinII -> booléen
Opérations d'accès :
etiquette_feuille : ('a, 'b) abinII -> 'a
etiquette_noeud : ('a, 'b) abinII -> 'b
fils_u, fils_g, fils_d : ('a, 'b) abinII -> ('a, 'b) abinII
```

Le calcul propositionnel en OCAML (deuxième possibilité)

```
# type ('a, 'b) abinII =
  F of 'a |
  N1 of 'b * ('a, 'b) abinII |
  N2 of 'b * ('a, 'b) abinII * ('a, 'b) abinII;;

# type op = Neg | Et | Ou | Impl;;

# let fl = N2(Et, N2(Ou, F(1), F(2)), N1(Neg, F(3)));;
val fl : ('a, 'b) abinII =
  N2 (Et, N2 (Ou, F 1, F 2), N1 (Neg, F 3))
```

Fonctions récursives sur les formules

Formules \subseteq Arbres, donc pour définir une fonction sur les formules on peut utiliser l'un des schémas récursifs sur les arbres.

Schéma récursif pour les formules

$$f(a) = g_1(a, f(\text{fils}_u(a)))$$

$$\text{Si } \text{est}_u(a)$$

$$f(a) = g_2(a, f(\text{fils}_g(a)), f(\text{fils}_d(a)))$$

$$\text{Si } \text{est}_b(a)$$

Quelques fois g_1 et g_2 se "ressemblent" beaucoup.

Cas particulier : lors que $\text{est}_f(a)$

2

Exemple : nb de lettres d'une formule

```
# let rec nblettres f = match f with
  | F(_) -> 1
  | N1(_, a) -> nblettres a
  | N2(_, a, b) -> nblettres a + nblettres b;;
```

Exercice : Qui sont les fonctions g_1 et g_2 ?

Preuve de propriétés par induction sur les formules

Exemple : Montrer que toute formule A est équivalente à une formule A' où le connecteur \neg se trouve uniquement à gauche d'une lettre propositionnelle.

Calculs des séquents

Définition : Un séquent est un couple de la forme $\Delta \triangleright \Gamma$, où Δ et Γ sont de multi-ensembles de formules.

Exemple :

$$\begin{array}{l} p, p, p \rightarrow q \quad \triangleright \quad r, p \vee s \\ p \rightarrow q \quad \triangleright \\ \quad \triangleright \quad p, s \\ \quad \quad \triangleright \end{array}$$

Définition d'un calcul des séquents

- On fixe des axiomes (des séquents particuliers)
- On fixe des règles d'inférence de la forme $\frac{\Delta_1 \triangleright \Gamma_1 \dots \Delta_n \triangleright \Gamma_n}{\Delta \triangleright \Gamma}$

Le système G

Axiome : $\Delta, A \triangleright \Gamma, A$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \triangleright A, A}{\Delta, \neg A \triangleright \Gamma} (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \triangleright \Gamma}{\Delta \triangleright \Gamma, \neg A} (\neg d)$$

$$\frac{\Delta \triangleright A, \Gamma \quad \Delta, B \triangleright \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \triangleright \Gamma} (\rightarrow g) \quad \frac{\Delta, A \triangleright B, \Gamma}{\Delta \triangleright A \rightarrow B, \Gamma} (\rightarrow d)$$

3

$$\frac{\Delta, A, B \triangleright \Gamma}{\Delta, A \wedge B \triangleright \Gamma} (\wedge g) \quad \frac{\Delta \triangleright A, \Gamma \quad \Delta \triangleright B, \Gamma}{\Delta \triangleright A \wedge B, \Gamma} (\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \triangleright \Gamma \quad \Delta, B \triangleright \Gamma}{\Delta, A \vee B \triangleright \Gamma} (\vee g) \quad \frac{\Delta \triangleright A, B, \Gamma}{\Delta \triangleright A \vee B, \Gamma} (\vee d)$$

Dérivation d'un séquent

Définition : La dérivation d'un séquent $\Gamma \triangleright \Delta$ à partir d'un ensemble de séquents Φ , notée $\Phi \vdash \Gamma \triangleright \Delta$, est un arbre fini tel que

- les nœuds sont des séquents
- chaque feuille est soit une formule de Φ , soit un axiome
- si S est le père des $S_1 \dots S_n$, alors S est obtenu par l'application d'une règle d'inférence sur $S_1 \dots S_n$.
- la racine de l'arbre est le séquent $\Gamma \triangleright \Delta$

Preuves et théorèmes

Définition : La preuve d'un séquent $\Gamma \triangleright \Delta$ est une dérivation de $\Gamma \triangleright \Delta$ à partir de l'ensemble vide de séquents. On dit dans ce cas que $\Gamma \triangleright \Delta$ est un théorème.

Conséquence logique (rappel)

Définition : Un multi-ensemble de formules Γ est conséquence logique d'un multi-ensemble de formules Δ , noté $\Delta \models \Gamma$, si toute interprétation qui satisfait toutes les formules de Δ satisfait au moins une formule de Γ .

Exemple :

$$p, p \rightarrow q \models q, r, s$$

Propriétés fondamentales du système G

Théorème : (Correction) Le système G est correcte, i.e., si $\Delta \triangleright \Gamma$ est un théorème, alors $\Delta \models \Gamma$.

4

Théorème : (Complétude) Le système \mathcal{G} est complet, i.e., si $\Delta \models \Gamma$, alors $\Delta \triangleright \Gamma$ est un théorème.

Donc, on peut utiliser \mathcal{G} comme alternative aux tables de vérité. Cette approche peut produire des économies très importantes!

Premier exemple de dérivation dans \mathcal{G}

$$\frac{\frac{p \triangleright q}{\triangleright \neg p, q} (\neg d)}{\neg q \triangleright \neg p} (\neg g)$$

On a une dérivation de $\neg q \triangleright \neg p$ à partir de $p \triangleright q$: $p \triangleright q \vdash \neg q \triangleright \neg p$.

Donc, on sait que $p \triangleright q \models \neg q \triangleright \neg p$, sans besoin de construire une table de vérité, dont la taille dépendrait du nombre de lettres propositionnelles en jeux.

Deuxième exemple de dérivation dans \mathcal{G}

$$\frac{\frac{p \triangleright \neg p}{\triangleright p \rightarrow \neg p} (\rightarrow d)}{\neg(p \rightarrow \neg p)} (\neg g)$$

On a $p \triangleright \neg p \vdash \neg(p \rightarrow \neg p)$ et donc aussi $p \triangleright \neg p \models \neg(p \rightarrow \neg p)$

Comment transformer quelques dérivations dans \mathcal{G}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \triangleright \Gamma$ est dérivable dans le système \mathcal{G} , alors $\Delta, A \triangleright \Gamma$ et $\Delta \triangleright A, \Gamma$ le sont aussi.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \triangleright \Gamma$ est dérivable dans le système \mathcal{G} , alors $\Delta, A \triangleright \Gamma$ l'est aussi. Si $\Delta \triangleright \Gamma, A, A$ est dérivable dans le système \mathcal{G} , alors $\Delta \triangleright \Gamma, A$ l'est aussi.

Premier exemple de théorème dans \mathcal{G}

Modus ponens

$$\frac{p \triangleright p, q \ (ax) \quad p, q \triangleright q \ (ax)}{p, p \rightarrow q \triangleright q} (\rightarrow g)$$

On a $\vdash p, p \rightarrow q \triangleright q$, donc $p, p \rightarrow q \triangleright q$ est valide.

Deuxième exemple de théorème dans \mathcal{G}

Tiers exclu

$$\frac{\frac{p \triangleright p \ (ax)}{\triangleright p, \neg p} (\neg d)}{\triangleright p \vee \neg p} (\vee d)$$

On a $\vdash \triangleright p \vee \neg p$

Troisième exemple de théorème dans \mathcal{G}

Loi de Pierce

$$\frac{\frac{\frac{p \triangleright q, p \ (ax)}{\triangleright p \rightarrow q, p} (\rightarrow d) \quad p \triangleright p \ (ax)}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \triangleright p} (\rightarrow g)}{\triangleright ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\rightarrow d)$$

On a $\vdash \triangleright ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$